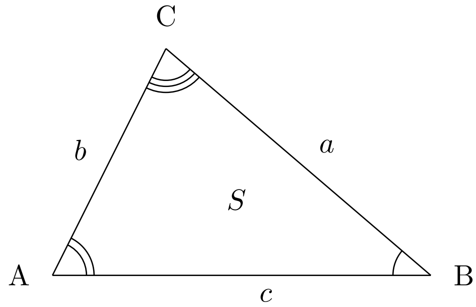
Correction de l'interrogation n°21

Soit ABC un triangle, on note $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, S l'aire, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$:



Exercice 1. ROC Démontrer le théorème suivant :

1. **Théorème 1 : *d'Al Kashi, dit « Pythagore généralisé »***
   Avec les notations précédentes : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

   Preuve
   Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, il vient $BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
   d'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

2. Calculer AB sachant que $AC = 4$, $BC = 6$ et $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$ rad, puis calculer S
   $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{C} = 16 + 36 - 48\cos\dfrac{\pi}{6} = 52 - \dfrac{48}{2} = 52 - 24 = 28$ cm
   Par conséquent :
   $$\boxed{AB = \sqrt{28} \simeq 5,29 \text{ cm}}$$

Exercice 2. Dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$ on note $A(2;-1)$ et $B(-3;4)$ deux points.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$
   $M(x,y) \in \mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$
   Or,
   $$\boxed{\overrightarrow{MA}(2-x;-1-y) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MB}(-3-x;4-y)}$$
   On a donc
   $$\begin{aligned}
   & M(x;y) \in \mathscr{C} \\
   \iff\ & (2-x)(-3-x) + (-1-y)(4-y) = 0 \\
   \iff\ & -6 + 3x - 2x + x^2 - 4 + y - 4y + y^2 = 0 \\
   \iff\ & x^2 + x + y^2 - 3y = 10 \\
   \iff\ & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 10 \\
   \iff\ & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{10}{4} = \frac{50}{4}
   \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{C} : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ au cercle $\mathscr{C}$ passant par A.
   Notons I le centre du cercle $\mathscr{C}$, d'après la question précédente $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

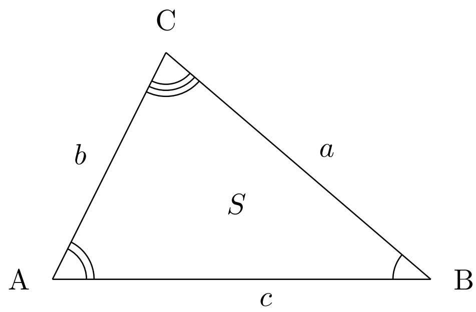
$$\begin{array}{cc} & M(x;y) \in \mathscr{T} \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{IA} = 0 \\ \Longleftrightarrow & (x-2)\left(2+\frac{1}{2}\right) + (y+1)\left(-1-\frac{3}{2}\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow & 2,5x-5-2,5y-2,5=0 \\ \Longleftrightarrow & 2,5x-2,5y=7,5 \\ \Longleftrightarrow & 5x-5y=15 \\ \Longleftrightarrow & x-y=3 \end{array}$$

   Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{T} : y = x-3}$$

Correction de l'interrogation n°21

Soit ABC un triangle, on note $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, S l'aire, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$:



Exercice 1. ROC Démontrer le théorème suivant :

1. **Théorème 2 :**

   Avec les notations précédentes, $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

   Preuve

   Soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait que :

   $$S = \frac{1}{2}AB \times CH$$

   Lorsque $\widehat{A}$ est aigu, $CH = CA\sin\widehat{A}$ et sinon $CH = \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = CA\sin\widehat{A}$. Par conséquent, dans tous les cas : $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

2. Calculer AB sachant que $AC = 6$, $BC = 4$ et $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{3}$ rad, puis calculer S

   $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos\widehat{C} = 36 + 16 - 48\cos\dfrac{\pi}{3} = 52 - \dfrac{48\sqrt{3}}{2}$ cm
   Par conséquent :

   $$\boxed{AB = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}} \simeq 3,23 \text{ cm}}$$

Exercice 2. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on note $A(-2; 1)$ et $B(3; 4)$ deux points.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$
   $M(x, y) \in \mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
   Or,

   $$\boxed{\overrightarrow{MA}(-2 - x; 1 - y) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MB}(3 - x; 4 - y)}$$

On a donc

$$\begin{array}{rc} & M(x;y) \in \mathscr{C} \\ \iff & (-2-x)(3-x)+(1-y)(4-y)=0 \\ \iff & -6-3x+2x+x^2+4-y-4y+y^2=0 \\ \iff & x^2-x+y^2-5y=2 \\ \iff & \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}=2 \\ \iff & \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=2+\dfrac{26}{4}=\dfrac{17}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathscr{C} : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{17}{2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ au cercle $\mathscr{C}$ passant par A.

   Notons I le centre du cercle $\mathscr{C}$, d'après la question précédente $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

$$\begin{array}{rc} & M(x;y) \in \mathscr{T} \\ \iff & \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{IA}=0 \\ \iff & (x+2)\left(-2-\dfrac{1}{2}\right)+(y-1)\left(1-\dfrac{5}{2}\right)=0 \\ \iff & -2,5x-5-1,5y+1,5=0 \\ \iff & -2,5x-1,5y=3,5 \\ \iff & -5x-3y=7 \end{array}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{T} : -5x-3y=7}$$