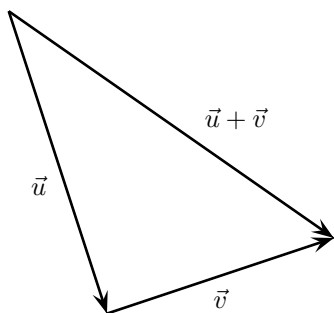


Correction de l'interrogation n°20

Exercice 1. ROC

Démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1 :**Dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$ **Preuve**

D'après le théorème de Pythagore on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \vec{u} \perp \vec{v} \\
 \iff & \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \\
 \iff & (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \\
 \iff & x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \\
 \iff & 2xx' + 2yy' = 0 \\
 \iff & xx' + yy' = 0 \\
 \iff & \vec{u} \cdot \vec{v} = 0
 \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère un repère orthonormal. On donne :

$$A(1; -1) \quad B(3; 3) \quad C(-4; 4) \quad D(2; 1)$$

Montrons que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{AB}(2; 4) \text{ et } \overrightarrow{CD}(6; -3)$$

De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 6 + 4 \times (-3) = 12 - 12 = 0$, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires**Exercice 3.** ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = 25 \cos 60 = \frac{25}{2}$
- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = CA \times CI \times \cos(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CI}) = 5 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$
- $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$

Correction de l'interrogation n°20

Exercice 1. ROC

Démontrer le théorème suivant :

**Propriété 1 :**

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ on a :

1. Bilinéarité (linéarité par rapport aux deux variables :))

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (\text{linéarité par rapport à la première variable})$$

2. Positive : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

**Preuve**

Dans un repère orthonormal, notons $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$ et $\vec{w}(x''; y'')$

- 1.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 \geq 0$

Exercice 2. On considère un carré $ABCD$. On note I le milieu de $[AB]$

1. Comme $(IA) \perp (AD)$, A est le projeté orthogonal de D sur (AI) , par conséquent :

$$\vec{IA} \cdot \vec{ID} = \vec{IA} \cdot \vec{IA} = IA^2$$

2. On a aussi

$$\vec{IA} \cdot \vec{ID} = IA \times ID \times \cos(\vec{IA}; \vec{ID}) = IA \times ID \cos(\widehat{AID})$$

$$\text{De plus d'après Pythagore } ID = \sqrt{IA^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + AB^2} = \sqrt{\frac{5}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{5}AB}{2}$$

Par conséquent :

$$IA^2 = IA \times ID \cos(\widehat{AID}) \iff \frac{IA}{\frac{\sqrt{5}AB}{2}} = \cos(\widehat{AID}) \iff \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{\sqrt{5}AB}{2}} = \cos(\widehat{AID})$$

Au final :

$$\cos(\widehat{AID}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Donc l'angle $\widehat{AID} \simeq 63,43$

Exercice 3. On considère un repère orthonormal. On donne :

$$A(0; 2) \quad B(3; 4) \quad C(5; 1)$$

On a $\vec{AB}(3; 2)$; $\vec{BC}(2; -3)$ et $\vec{AC}(5; -1)$

1. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0$

2. D'après la question précédente (AB) et (BC) sont perpendiculaires donc le triangle ABC est rectangle.