Correction de l'interrogation n°18

Exercice 1. ROC
Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 : *La somme des n premiers entiers vaut*

$$1+2+\cdots+n-1+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve
Notons $S=1+2+\cdots+n-1+n$, on a $2S=1+2+\cdots+n+1+2+\cdots+n=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)=n(n+1)$ donc $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1=1+3+9+27+81+\cdots+59049 \quad \text{et} \quad S_2=1+3+5+7+9+\cdots+999$$

Considérons la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=3$
On a : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_n$. Cherchons l'indice du dernier terme :
$u_n=u_0q^n=59049 \iff 3^n=59049 \iff n=10$
La somme S_1 vaut donc $u_0+u_1+\cdots+u_{10}$ et comporte 11 termes, par conséquent :

$$S_1=u_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-3^{11}}{1-3}=88573$$

Considérons la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0=1$ de raison $r=2$
On a : $S_2=v_0+v_1+\cdots+v_n$. Cherchons l'indice du dernier terme :
$v_n=v_0+nr=999 \iff 1+2n=999 \iff 2n=998 \iff n=499$
La somme S_2 comporte donc 500 termes, par conséquent :

$$S_2=\frac{n(p+d)}{2}=\frac{500(1+999)}{2}=\frac{500\times 1000}{2}=250\times 1000=250000$$

Exercice 3. On considère la suite définie par : $u_n=2^n$.
$u_0=1$, $u_1=2$ et $u_2=4$. La suite (u_n) n'est pas arithmétique, en effet pour passer du premier au deuxième terme, on ajoute 1 et pour passer du second au troisième on ajoute 2.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$, par conséquent (u_n) est géométrique de raison 2

Correction de l'interrogation n°18

Exercice 1. ROC
Démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 :
La somme de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est égale à :

$$a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Preuve
Notons $S' = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}$, on a $qS' = q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$
Par conséquent

$$(1-q)S' = S' - qS' = 1 - q^n \iff S' = \frac{1-q^n}{1-q}$$

On calcule donc S, la somme de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q où $q \neq 1$

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercice 2. Calculer la valeur exacte de la somme :

$$S_1 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 4096 \quad \text{et} \quad S_2 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + 1000$$

Considérons la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -2$
On a : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Cherchons l'indice du dernier terme :
$u_n = u_0 q^n = 4096 \iff (-2)^n = 4096 \iff n = 12$
La somme S_1 vaut donc $u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$ et comporte 13 termes, par conséquent :

$$S_1 = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-(-2)^{13}}{1+2} = 2731$$

Considérons la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = 1$ de raison $r = 3$
On a : $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Cherchons l'indice du dernier terme :
$v_n = v_0 + nr = 999 \iff 1 + 3n = 1000 \iff 3n = 999 \iff n = 333$
La somme S_2 comporte donc 334 termes, par conséquent :

$$S_2 = \frac{n(p+d)}{2} = \frac{334(1+1000)}{2} = \frac{334 \times 1001}{2} = 167167$$

Exercice 3. On considère la suite définie par : $u_n = 2^n - n$.
Calculer $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$. La suite (u_n) n'est pas arithmétique, puisqu'on ajoute 0 à u_0 pour obtenir u_1 et 2 à u_1 pour obtenir u_2.
Elle n'est pas non plus géométrique, puisqu'on multiplie u_0 par 1 pour obtenir u_1 et qu'on multiplie u_1 par 3 pour obtenir u_2.