

Correction de l'interrogation n°18

Exercice 1. ROC

Démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1 :**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors $u_n = u_0 + nr$

**Preuve**

(u_n) étant une suite arithmétique, on a : $u_1 = u_0 + r$, puis $u_2 = u_1 + r (= u_0 + 2r)$, et ainsi de proche en proche on a :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

.....

$$u_{n-1} = u_{n-2} + r$$

$$u_n = u_{n-1} + r$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + nr \iff u_n = u_0 + nr$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n + 1 \end{cases} \quad \text{et } v_n = \frac{4n + (-1)^n}{n}$$

1. $u_1 = u_0 + 0^2 - 0 + 1 = 3$, $u_2 = u_1 + 1^2 - 1 + 1 = 4$

$$v_{50} = \frac{4 \times 50 + (-1)^{50}}{50} = \frac{201}{50}$$

2. Comme $u_{n+1} - u_n = n^2 - n + 1$, on étudie le signe de $n^2 - n + 1$ où n est un entier naturel
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$, par conséquent $n^2 - n + 1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{4n-1}{n} < v_n < \frac{4n+1}{n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4$, par conséquent d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$$

La suite (v_n) converge donc vers 4

Exercice 3. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? (Justifier). Si oui donner la raison.

1. $u_n = 2n - 3$

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2n + 2 - 2n = 2$ qui est constante, ce qui prouve que la suite (u_n) est arithmétique de raison 2

2. $v_n = -3n^2 + 1$

On calcule la différence $v_{n+1} - v_n = -3(n+1)^2 + 1 + 3n^2 - 1 = -3n^2 - 6n - 3 + 3n^2 - 1 = -6n - 4$ qui dépend de n , ce qui prouve que la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

3.
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$$

Cette suite est arithmétique par définition, de raison -5

Correction de l'interrogation n°18

Exercice 1. ROC

Démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2 :**

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$, où $a \geq 0$.
Si la fonction f est monotone (resp. strictement monotone) sur $[a; +\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone (resp. strictement monotone) et possède le même sens de variation que la fonction f .

**Preuve**

1. Cas 1 : f est strictement croissante sur $[a; +\infty[$

Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement croissante sur $[a; +\infty[$,

$$f(n) < f(n+1) \iff u_n < u_{n+1}$$

Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.

2. Cas 2 : f est strictement décroissante sur $[a; +\infty[$

Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement décroissante sur $[a; +\infty[$,

$$f(n) > f(n+1) \iff u_n > u_{n+1}$$

Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{n-1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right) - 5n}{n^2}$$

$$1. \quad v_1 = \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5}{1} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} - 5; \quad v_2 = \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$u_{50} = \frac{49}{50}$$

2. On va étudier le sens de variation de la fonction f où $f(x) = \frac{x-1}{x}$

$$f'(x) = \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0, \text{ donc la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

3. On a :

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
 & -1 \leq \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\
 \Leftrightarrow & -3 \leq 3 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \\
 \Leftrightarrow & -3 - 5n \leq 3 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - 5n \leq 3 - 5n \\
 \Leftrightarrow & \frac{-3 - 5n}{n^2} \leq v_n \leq \frac{3 - 5n}{n^2}
 \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n - 5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 5n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, par conséquent d'après le théorème des gendarmes la suite (v_n) converge vers 0

Exercice 3. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? (Justifier). Si oui donner la raison.

1. $u_n = 5n^2 - 4$

On calcule $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)^2 - 4 = 5n^2 + 10n + 5 - 4 = 5n^2 + 10n + 1$, différence qui dépend de n , la suite n'est donc pas arithmétique.

2. $v_n = -3n + 1$

D'après le cours la suite v_n est arithmétique et a pour raison -3

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$

D'après le cours la suite (u_n) est arithmétique et a pour raison $-\frac{1}{3}$