

Correction de l'interrogation n°15

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :



Propriété 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Démonstration :

Pour $h \neq 0$ on calcule le taux de variation de f entre x et $x+h$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, aller c'est parti :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

et ce taux de variation tend vers $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ lorsque h tend vers 0, par conséquent $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$
- $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$
- On cherche les racines du trinôme :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 48 = 64$$

on a donc :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+8}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

- Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{94}{27}$		-6	$+\infty$

- f' s'annule en $-\frac{2}{3}$ en changeant de signe, par conséquent la fonction f admet un maximum local en $-\frac{2}{3}$, qui est $\frac{94}{27}$. De même la fonction f' s'annule en 2 en changeant de signe, par conséquent la fonction f admet un minimum local en 2, qui est -6
- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est la droite d'équation :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) = 11(x-3) - 1 = 11x - 33 - 1 = 11x - 34$$

Nom :

Prénom :

Classe :

Correction de l'interrogation n°15

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

**Propriété 2 :**On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **Preuve**Pour $h \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2)(x+h) - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

ce qui tend vers $3x^2$ lorsque h tend vers 0, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, CQFD.**Exercice 2.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$
- $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$
- On cherche les racines du trinôme :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 48 = 84$$

on a donc :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{84}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{84}}{6}$$

- Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-6 - \sqrt{84}}{6}$	$\frac{-6 + \sqrt{84}}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_2)$	$f(x_1)$	$+\infty$

- f' s'annule en $\frac{-6 + \sqrt{84}}{6}$ en changeant de signe, par conséquent la fonction f admet un minimum local en $\frac{-6 + \sqrt{84}}{6}$ qui est $f(x_1)$. De même la fonction f' s'annule en $\frac{-6 - \sqrt{84}}{6}$ en changeant de signe, par conséquent la fonction f admet un maximum local en $\frac{-6 - \sqrt{84}}{6}$, qui est lui $f(x_2)$
- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est la droite d'équation :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 41(x - 3) + 44 = 41x - 123 + 44 = 41x - 79$$