

Nom :

Prénom :

Classe :

Correction de l'interrogation n°12

Exercice 1.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 5x - 5}{x^2 + 1}$

1. Montrer que $f(x) = 2x - 5 + \frac{3x}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x - 5 + \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{(2x - 5)(x^2 + 1) + 3x}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 + 2x - 5x^2 - 5 + 3x}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 - 5x^2 + 5x - 5}{x^2 + 1} = f(x)$$

2. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x - 5 + \frac{3x}{x^2 + 1} = f(x)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 5 = -\infty \text{ et } \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{3x}{x \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{3}{x + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

Au final donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x - 5 + \frac{3x}{x^2 + 1} = f(x)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5 = +\infty \text{ et } \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{3x}{x \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{3}{x + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

Au final donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

4.

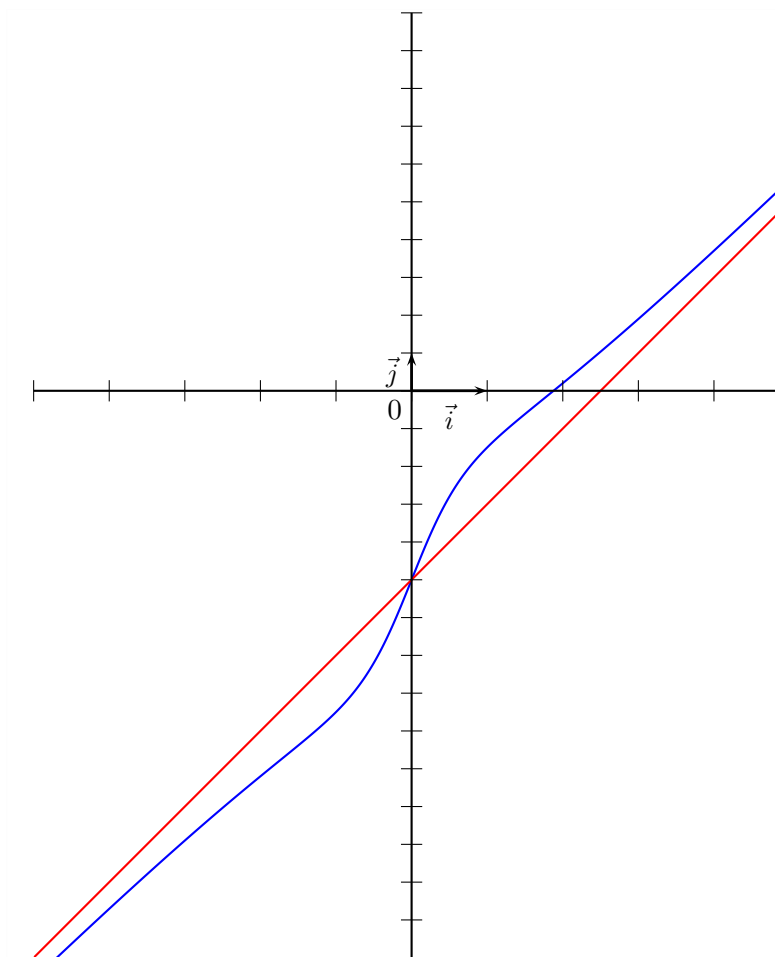
$$f(x) - (2x - 5) = \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{3}{x + \frac{1}{x}}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{1}{x} = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

donc la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f en $\pm\infty$

5. Tracer soigneusement, la courbe $\mathcal{C}_f$ et Δ



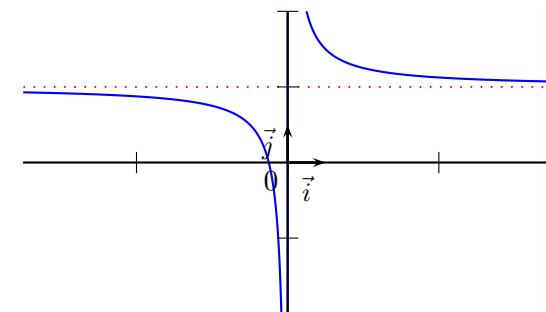
Définition 1 :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$), on dit que la droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$)



Exemple :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$



Nom :

Prénom :

Classe :

Correction de l'interrogation n°12

Exercice 1.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^5 + x^4 + 3x + 3}{x^4 + 1}$

1. Montrer que $f(x) = 3x + 1 + \frac{2}{x^4 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 1 + \frac{2}{x^4 + 1} = \frac{(3x + 1)(x^4 + 1) + 2}{x^4 + 1} = \frac{3x^5 + 3x + x^4 + 1 + 2}{x^4 + 1} = \frac{3x^5 + x^4 + 3x + 3}{x^4 + 1} = f(x)$$

2. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 1 + \frac{2}{x^4 + 1} = f(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 1 = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + 1 = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^4 + 1} = 0$$

Au final donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 1 + \frac{2}{x^4 + 1} = f(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 1 = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^4 + 1} = 0$$

Au final donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- 4.

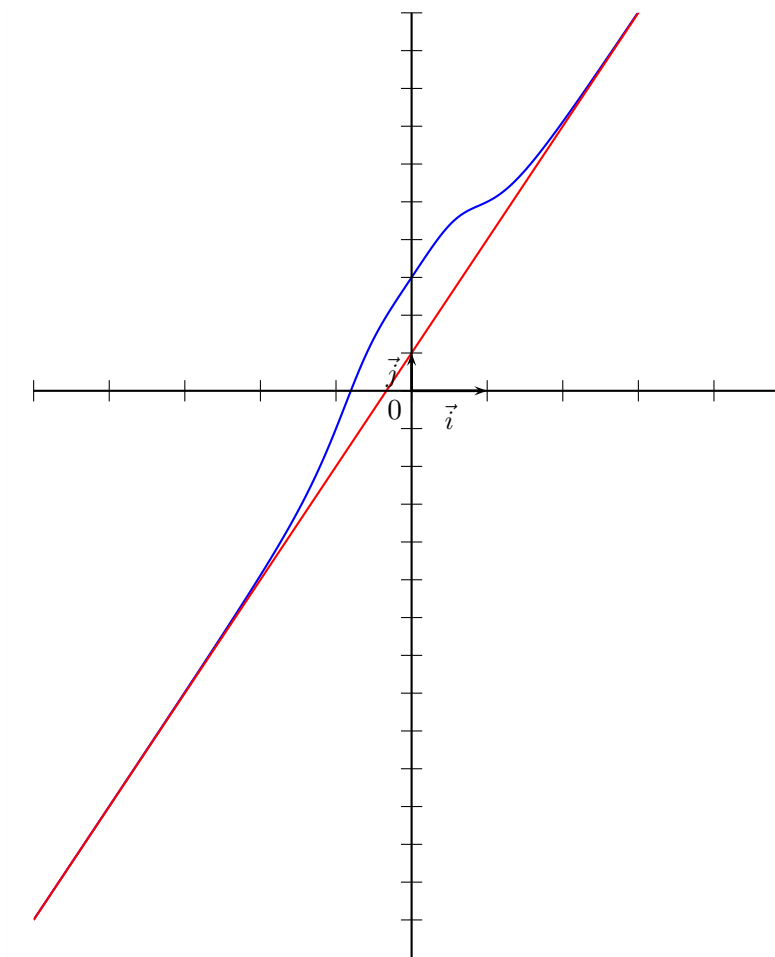
$$f(x) - (3x + 1) = \frac{2}{x^4 + 1} = 0$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 1 = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^4 + 1} = 0$$

donc la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f en $\pm\infty$

5. Tracer soigneusement, la courbe $\mathcal{C}_f$ et Δ



Définition 2 :

Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a , alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$



Exemple :

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} \right) = +\infty$ (et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} \right) = -\infty$),
donc la courbe représentative de la fonction f
définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet une asymptote
verticale d'équation $x = 2$

