Correction du devoir Surveillé 7 : Suites

Exercice 1. ROC (2 points)

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 : *Somme des n premiers entiers*

$$1+2+\cdots+n-1+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve

Notons $S=1+2+\cdots+n-1+n$, on a $2S=1+2+\cdots+n+1+2+\cdots+n=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)=n(n+1)$ donc $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2. (3 points)

On sait que la somme des n premiers entiers naturels n vaut $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Donc

$$\boxed{S_1=\frac{2010\times 2011}{2}=2021055}$$

.

Pouyr S_2 on utilise la suite (u_n) définie par $u_n=6\times 3^n$ qui est géométrique de raison 3. On a alors :

$$\boxed{S_2=u_1+u_2+\cdots+u_8=18\times\frac{1-3^8}{1-3}=59040}$$

Exercice 3. (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50}=406$ et $u_{100}=806$.

1. On sait que $u_{50}=u_0+50r$ et $u_{100}=u_0+100r$. D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases}406=u_0+50r\\806=u_0+100r\end{cases}$$

   Après calculs, on trouve :

$$\boxed{r=8}$$

   et

$$\boxed{u_0=6}$$

2. $S=u_{50}+u_{51}+\cdots+u_{100}=51\times\dfrac{u_{50}+u_{100}}{2}=51\times\dfrac{1212}{2}=51\times 606=30906$

$$\boxed{S=30906}$$

Exercice 4. (4 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500€. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.
On note (C_n) la suite des primes avec $C_1 = 500$.

1. $C_2 = C_1 + C_1 \times \dfrac{2}{100} = C_1 \times 1.02 = 510.$

   $$\boxed{C_2 = 510}$$

   $C_3 = C_2 \times 1.02 = 520.20.$

   $$\boxed{C_3 = 520,20}$$

2. $C_{n+1} = C_n \times 1.02$. Donc la suite (C_n) est géométrique de raison 1.02.
3. La suite (C_n) diverge car il s'agit d'une suite géométrique de raison $1.02 > 1$.
4. $C_{20} = C_1 \times 1.02^{20-1} = 728.41.$

   $$\boxed{C_{20} = 728,41}$$

Exercice 5. (4 points)

1. (a) $u_n = n^2 - n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   On a $u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$.
   Donc $u_{n+1} - u_n = n^2 + n - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
   Donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

   (b) $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 2$. On a $v_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $v_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut faire le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:
   Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1} \geq 1$ pour tout entier $n \geq 2$.
   Donc (v_n) est croissante pour $n \geq 2$.
2. (a) $w_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

   (w_n) est une suite géométrique à termes positifs et de raison $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc (w_n) converge vers 0.

   (b) $t_n = \dfrac{5n^5 - 8n^4 - 9}{6n^5 + 5n^3 - n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^5}{6n^5} = \frac{5}{6}$

Exercice 6. (4 points)

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ est la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout entier natuel n.

Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. (a) $u_1 = \dfrac{2u_0 + 3}{u_0 + 4} = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{2u_1 + 3}{u_1 + 4} = \dfrac{\dfrac{3}{2} + 3}{\dfrac{3}{4} + 4} = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{4}{19} = \dfrac{18}{19}$

(b) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\dfrac{1}{3}$ et $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = \dfrac{\dfrac{3}{4} - 1}{\dfrac{3}{4} + 3} = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{15} = -\dfrac{1}{15}$

2. (a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 3 - (u_n + 4)}{u_n + 4}}{\dfrac{2u_n + 3 + 3(u_n + 4)}{u_n + 4}} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4} \times \dfrac{u_n + 4}{5u_n + 15} = \dfrac{1}{5} v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{3}$

(b) Donc on a $v_n = v_0 \times q^n = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}$.

3. (a) Après calculs on trouve $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \iff u_n = \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n}$ pour $v_n \neq 1$ (ce qui est toujours le cas, car $v_n < 0$ pour tout n.

(b) Donc $u_n = \dfrac{3 \times \left(-\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}\right) + 1}{1 - \left(-\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}\right)} = \dfrac{-\dfrac{1}{5^n} + 1}{1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}} = \dfrac{-1 + 5^n}{5^n} \times \dfrac{3 \times 5^n}{3 \times 5^n + 1} = \dfrac{3(5^n - 1)}{3 \times 5^n + 1}$

Ainsi $u_5 = \dfrac{3(5^5 - 1)}{3 \times 5^5 + 1} = \dfrac{9372}{9376} = \dfrac{2343}{2344}$

Exercice 7. (Bonus)

« Le premier jour du mois, je gagnais 2 centimes, le deuxième jour du mois je gagnais 4 centimes, le troisième jour je gagnais 8 centimes, etc..., en doublant d'un jour à l'autre. A la fin du mois, j'avais gagné environ un milliard de centimes ! C'était vers la fin des années 60 ».

En quelle année était-ce ?

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2, alors la somme des n premiers terme de cette suite vaut :

$$2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

On cherche n de manière à ce que

$$S = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \simeq 10^9$$

Pour $n = 28$, on obtient : $S = 536970912$, pour $n = 29$ on obtient $S = 1073741824 \simeq 10^9$, pour $n = 30$ et $n = 31$ on obtient beaucoup trop. Par conséquent le mois où cette personne a gagné 1000000000 de centimes comportait 29 jour. Il ne peut s'agir que du mois de février d'une année bissextile. 2008, comme 2004 étaient des années bissextiles, par conséquent 1968 et 1964 aussi, et donc seul 1968 convient !