

Correction du devoir Surveillé 6 : Probabilités

Exercice 1. ROC

(2 points)

Démontrer le théorème suivant :



Théorème 1 :

La probabilité de la réunion de deux événements A et B est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque : Pour cette démonstration on admet et on pourra utiliser les deux propriétés suivantes :

1. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



Preuve

Il suffit d'écrire que : $A \cup B = (A - B) \cup B$ et comme $(A - B) \cap B = \emptyset$, il vient :

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

Exercice 2.

(4 points)

Arthur possède quatre escargots de compétition spécialement nourris et entraînés pour la course de vitesse.

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| – Dossard n°1 : Pouf Pouf | – Dossard n°3 : Miaou Miaou |
| – Dossard n°2 : Ouaf Ouaf | – Dossard n°4 : Cui Cui |

On sait que, pour toute course, ces escargots ont des probabilités de l'emporter telles que :

$$P(1) = P(2) \quad ; \quad P(2) = 3P(3) \quad ; \quad P(3) = \frac{4}{3}P(4)$$

1. On sait que :

$$\begin{aligned}
 &P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1 \\
 \Leftrightarrow &P(1) + P(1) + \frac{1}{3}P(1) + \frac{3}{4}P(3) = 1 \\
 \Leftrightarrow &P(1) + P(1) + \frac{1}{3}P(1) + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}P(1) = 1 \\
 \Leftrightarrow &P(1) + P(1) + \frac{1}{3}P(1) + \frac{1}{4}P(1) = 1 \\
 \Leftrightarrow &\frac{12 + 12 + 4 + 3}{12}P(1) = 1 \\
 \Leftrightarrow &P(1) = \frac{12}{31}
 \end{aligned}$$

Et voilà donc la probabilité pour que Pouf Pouf gagne une course, qui est donc $\frac{12}{31}$. Aller mon gars, tu peux en gagner 5.

2. Aujourd'hui, Arthur organise 5 courses entre ces 4 escargots. Quelle est la probabilité que :

- (a) Notons $5V$ l'événement : « Pouf Pouf gagne 5 fois sur 5 »
A l'aide d'un arbre, on trouve immédiatement :

$$P(5V) = \left(\frac{12}{31}\right)^5 \simeq 0,009$$

Par même 1 chance sur 100, mon pauvre Pouf Pouf gagner 5 fois tient du miracle. Il va falloir que tu t'entraînes fort.

- (b) Notons $5D$ l'événement : « Pouf Pouf perd 5 fois sur 5 »
A l'aide du même arbre, on trouve immédiatement :

$$P(5D) = \left(\frac{19}{31}\right)^5 \simeq 0,09$$

Par contre, Pouf Pouf a bien plus de chance de repartir bredouille...(10 fois plus...)

- (c) Notons $+1V$ l'événement : « Pouf Pouf gagne au moins 1 fois sur 5 »
Il est clair que $5D$ est l'événement contraire de $+1V$, par conséquent :

$$P(+1V) = 1 - P(5D) = 1 - \left(\frac{19}{31}\right)^5 \simeq 0,91$$

Pouf Pouf a de grande chance d'être au moins une fois vainqueur, dans le cas contraire nous comprendrions sa déception.

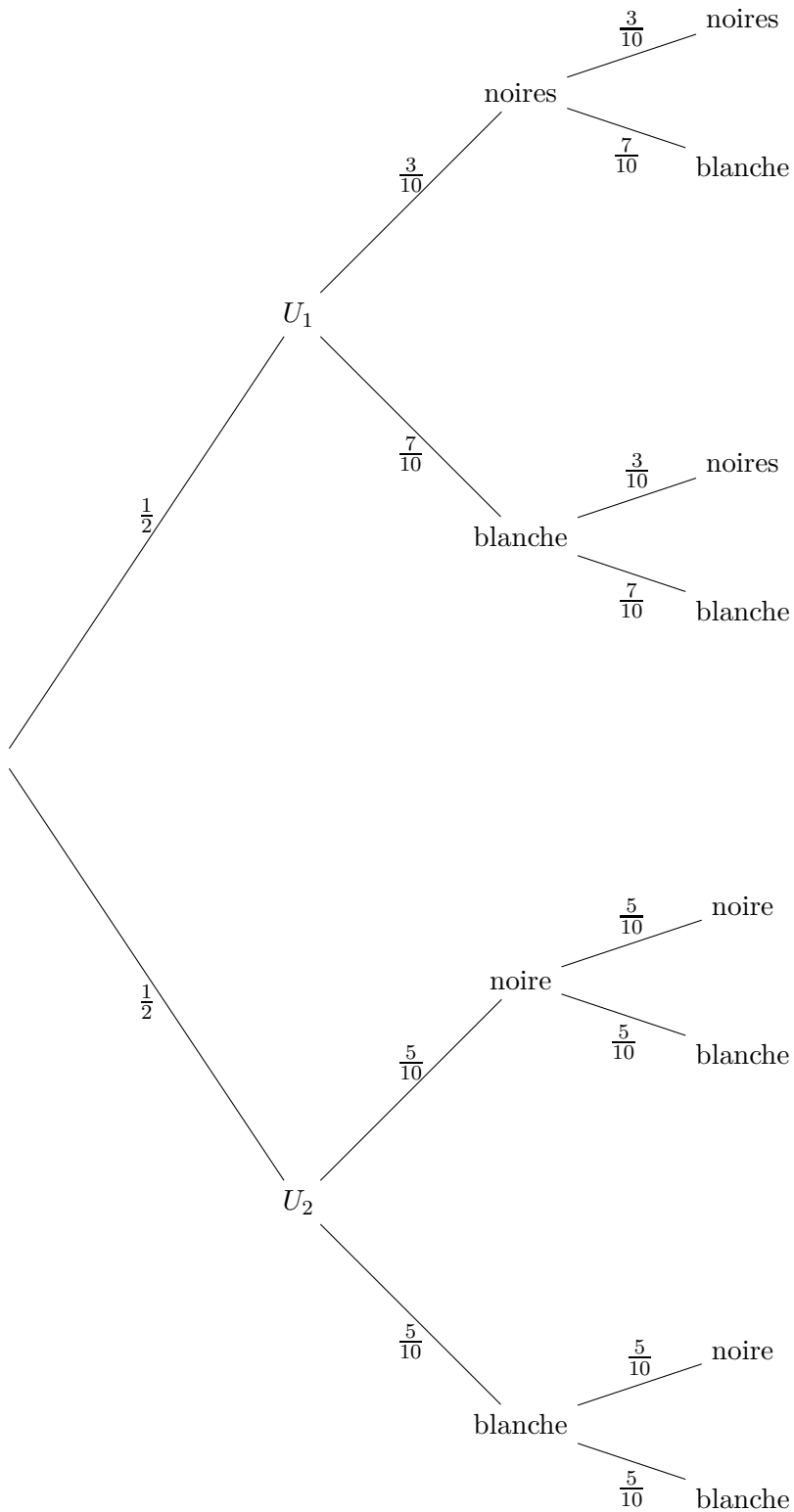
Exercice 3.

(6 points)

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.



- 1.
2. L'arbre comportant 8 issues, on a $\text{card}\Omega = 8$
3. Soient les événements suivants :
 - $A =$ « Obtenir deux boules blanches sachant que l'urne U_1 a été choisie »
 - $B =$ « Obtenir deux boules de mêmes couleurs »
 - $C =$ « Obtenir au moins une boule blanche »

$$P(A) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

et

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{49 + 9 + 25 + 25}{200} = \frac{108}{200} = \frac{27}{50} (= \frac{54}{100})$$

4. $\bar{C}$: « ne pas obtenir de boule blanche autrement dit obtenir deux boules noires », par conséquent

$$P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{9 + 25}{200} = \frac{34}{200} = \frac{17}{100}$$

et donc

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{17}{100} = \frac{83}{100}$$

5. L'événement $B \cap C$ est l'événement « obtenir deux boules blanches », on en déduit

$$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{49 + 25}{200} = \frac{74}{200} = \frac{37}{100}$$

6. $B \cup C = \Omega$. Par conséquent, de manière évidente $P(B \cup C) = 1$, mais puisqu'il faut déduire ce résultat de la question précédente, exécutons nous, cela confirmera (à priori) la perfection des calculs précédents :

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{54}{100} + \frac{83}{100} - \frac{37}{100} = 1$$

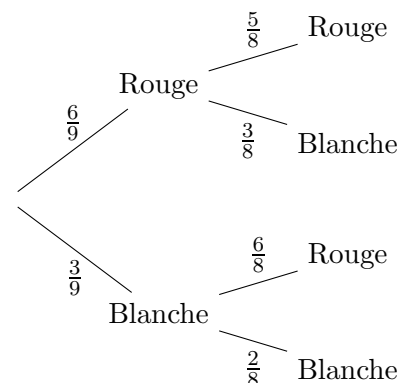
Auriez-vous pu trouver ce résultat sans calcul supplémentaire ? Evidemment, je viens de l'expliquer.

Exercice 4.

(8 points)

Une boîte contient six boules rouges et n boules blanches. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, deux boules de la boîte. Si les deux boules ont la même couleur, le joueur gagne 1€ ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1€. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique du joueur.

1. On suppose que $n = 3$.



- (a) Les calculs s'effectuent à l'aide d'un arbre de probabilité suivant :

- i. Notons C : « obtenir de boules de mêmes couleurs », alors

$$P(C) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

- ii. Par conséquent $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- (b) X prend les valeurs 1 et -1 , par conséquent la loi de la variable aléatoire X est donné par le tableau suivant :

$X = x_i$	-1	1	Total
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

- (c) On a :

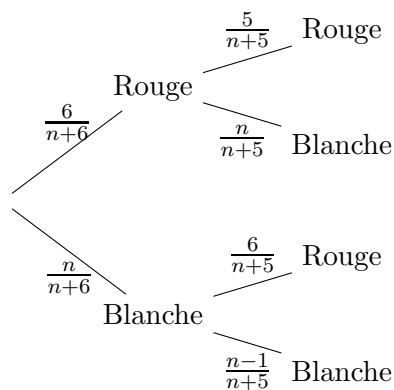
$$E(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

et

$$V(X) = \frac{1}{2}(-1 - 0)^2 + \frac{1}{2}(1 - 0)^2 = 1$$

donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$.

- (d) Le jeu est-il équitable ? Evidemment puisque $E(X) = 0$ Est-il risqué ? C'est tout relatif, à ce jeu on ne perd pas plus d'un euro, on a envie de penser que c'est peu risqué, ceci étant l'écart type est élevé en rapport au gain maximum et à la perte maximale, alors...



2. On suppose désormais que $n \geq 2$.

(a) On a

$$P(X = 1) = \frac{6}{n+6} \times \frac{5}{n+5} + \frac{n}{n+6} \times \frac{n-1}{n+5} = \frac{30 + n^2 - n}{(n+6)(n+5)}$$

et

$$P(X = -1) = \frac{6}{n+6} \times \frac{n}{n+5} + \frac{n}{n+6} \times \frac{6}{n+5} = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

(b)

$$E(X) = \frac{30 + n^2 - n}{(n+6)(n+5)} - \frac{12n}{(n+6)(n+5)} = \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$$

(c) Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0 \iff n^2 - 13n + 30 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 120 = 49$, par conséquent l'équation précédente admet deux racines réelles :

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 - 7}{2} = 3 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 + 7}{2} = 10$$

Les deux racines sont entières, par conséquent le jeu est équitable lorsqu'il y a 3 boules blanches ou 10 boules blanches.

(d) Le jeu est défavorable si et seulement si $E(X) < 0 \iff n^2 - 13n + 30 < 0 \iff n \in]3, 10[$

Exercice 5. (Bonus)

(1 point)

Au jeu des petits chevaux, pour pouvoir placer son cheval sur la case de départ, il faut, avec un dé que l'on suppose équilibré, obtenir un 6. Si on n'obtient pas de 6 on passe son tour. Calculer la probabilité de placer son cheval sur la case de départ : au premier lancé, au second puis au sixième.

Pour placer son petit cheval au premier lancer, il faut obtenir un six, cette probabilité vaut donc

$$\frac{1}{6}$$

Pour placer son petit cheval au second lancer, il faut ne pas avoir obtenu de 6 au premier lancer mais un au second, ce qui donne une probabilité de :

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Enfin pour placer son petit cheval au sixième lancer, il faut ne pas avoir eu de chance 5 fois puis avoir obtenu un six la sixième fois, ce qui arrive avec une probabilité valant :

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$