Correction du devoir Surveillé 1 : Les fonctions

Exercice 1. ROC : Prouver le résultat suivant :
Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) sur I alors $f+g$ est croissante (respectivement décroissante) sur I

Démonstration :

Soit x et y dans I tel que $x \leq y$.
Si f et g sont croissantes sur I :
Puisque f est croissante sur I on a : $f(x) \leq f(y)$. De même, puisque g est croissante on a : $g(x) \leq g(y)$. En sommant ces deux inégalités on obtient :

$$f(x)+g(x) \leq f(y)+g(y) \Longleftrightarrow (f+g)(x) \leq (f+g)(y)$$

$f+g$ est donc une fonction croissante sur I (ordre inchangé).
Si f et g sont décroissantes sur I :
Puisque f est décroissante sur I on a : $f(x) \geq f(y)$. De même comme g est décroissante on a : $g(x) \geq g(y)$. En sommant ces deux inégalités on obtient :

$$f(x)+g(x) \geq f(y)+g(y) \Longleftrightarrow (f+g)(x) \geq (f+g)(y)$$

$f+g$ est donc une fonction décroissante sur I (ordre changé).

Exercice 2. Soit f et g les fonctions définis sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x^3+2x-1$ et $g(x)=\sqrt{x}$

1. $f=u+v$ où $u(x)=x^3$ et $v(x)=2x-1$. On sait depuis la classe de seconde que u et v sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$.
2. Comme f est la somme de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}^+$, elle est croissante sur R^+
3.

x	0	$+\infty$
Variation de g	0	$\nearrow$

D'après la question précédente f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et nous savons que g aussi, donc la fonction somme est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

x	0	$+\infty$
Variation de f+g	-1	$\nearrow$

4. $-5g(x)=-5\sqrt{x}$. La fonction $-5g$ est le produit d'un nombre négatif par une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3(x-1)^2+2$

1. Soit x et y deux réels de l'intervalle $[1;+\infty[$ tel que

$$x<y\leq 1 \Longleftrightarrow x-1<y-1\leq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2>(y-1)^2 \Longleftrightarrow 3(x-1)^2+2>3(y-1)^2+2$$

L'ordre des images est strictement dans le même sens que l'ordre des antécédents, ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
$$(x-1)^2 \geq 0 \iff 3(x-1)^2 \geq 0 \iff 3(x-1)^2+2 \geq 2 \iff f(x) \geq 2$$
3. $f(x)=5 \iff 3(x-1)^2+2=5 \iff 3(x-1)^2=3 \iff (x-1)^2=1 \iff x-1=1$ ou $x-1=-1 \iff x=2$ ou $x=-2$
4. Soit g et h deux fonctions telles que $g(x)=3x+2$ et $h(x)=(x-1)^2$, on a $f=g\circ h$ (une autre solution, amusante et sans intérête : $h(x)=x$ et $g(x)=f(x)$! !)

Exercice 4. Fonctions associés et courbes

1. $f_1(x)=-f(x)$. Comme f est définie sur $[-3;3]$, $f(x)$ est calculable pour $x \in [-3;3]$ et donc f_1 aussi : $D_{f1}=[-3;3]$. On obtient la représentation graphique de $f_1$en faisant le symétrique par rapport *à* l'axe des abscisses de C_f
2. $f_2(x)=\mid f(x)\mid$. Comme f est définie sur $[-3;3]$, $f(x)$ est calculable pour $x \in [-3;3]$ et donc f_2 aussi : $D_{f2}=[-3;3]$. On obtient la représentation graphique de la fonction f_2, en conservant la partie de la représentation graphique de f qui se trouve au dessus de l'axe des abscisses et en prenant le symétrique par rapport *à* l'axe des abscisses de la partie qui se trouve sous l'axe des abscisses.
3. $f_3(x)=f(x)+1$. Comme f est définie sur $[-3;3]$, $f(x)$ est calculable pour $x \in [-3;3]$ et donc f_3 aussi : $D_{f3}=[-3;3]$. C_{f3} est l'image de C_f par la translation de vecteur $\vec{j}$.
4. $f_4(x)=f(x+1)$. Comme f est définie sur $[-3;3]$, $f(x)$ est calculable pour $x \in [-3;3]$ donc il faut que $-3 \leq x+1 \leq 3 \iff -4 \leq x \leq 2$, donc $D_{f4}=[-4;2]$. C_{f4} est l'image de C_f par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

Exercice 5. Déterminer dans chaque cas $g\circ f$ et son ensemble de définition :

1. $g\circ f(x)=g(f(x))=g(2x-5)=\dfrac{1}{2x-5}$ Cette fonction est définie si $2x+5 \neq 0 \iff x \neq -\dfrac{5}{2}$, donc sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$
2. $g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2)=\dfrac{1}{x^2+1}$ Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1 \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $g\circ f(x)=g(f(x))=g(-7\sqrt{x})=-7\sqrt{x}-1$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^+$.
4. $g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^4)=5x^4+1$ définie sur $\mathbb{R}$.