Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°10

Propriété 1. ROC
On considère une repère cartésien $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé et le repère polaire $(O;\vec{i})$. Soit M un point du plan, on note $(x;y)$ ses coordonnées cartésiennes et $(\rho;\theta)$ ses coordonnées polaires.
Montrer que :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{puis} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\rho} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

$\rho = OM = \overline{x^2+y^2}$. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathscr{C}$ en N.
Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires et de même sens donc

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \theta$$

Le point N, image du réel θ sur le cercle $\mathscr{C}$, a pour coordonnées $(\cos\theta;\sin\theta)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$. Or $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{ON}$ donc les coordonnées de M sont $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, c'est-à-dire $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$

Exercice 1. On donne les points A, de coordonnées cartésiennes $\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, et M tel que :

$$AM = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{12}$$

1. $\rho = \overline{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}} = 3$. Puis on trouve que $\theta = \frac{\pi}{3}$ à l'aide du cos et du sin, en effet on a : $\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En fin de compte les coordonnées polaires de A dans le repère polaire $(O;\vec{i})$ sont $(3;\frac{\pi}{3})$
2. $(\vec{i},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$ par définition des coordonnées polaires, puis en utilisant Chasles on a $(\vec{i},\overrightarrow{AO}) = (\vec{i},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.
3. $(\vec{i},\overrightarrow{AM}) = (\vec{i},\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}) = -\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{4}$
4. Comme $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM}$, on a $OB = AM = \sqrt{2}$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{4}$, et donc les coordonnées polaires de B sont $(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4})$
5. $x = \rho\cos\theta = \sqrt{2}\times\cos\frac{-\pi}{4} = 1$ et $y = \rho\sin\theta = \sqrt{2}\times\sin\frac{-\pi}{4} = -1$ donc les coordonnées cartésiennes de B sont $(1;-1)$, enfin comme $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM}$ les deux vecteurs ont mêmes coordonnées ce qui donne :

$$x_m = x_b + x_a = 1 + 1,5 = 2,5 \qquad \text{et } y_m = y_b + y_a = -1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Par conséquent les coordonnées cartésiennes de M sont $\left(\frac{5}{2};-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Correction de l'interrogation n°10

Exercice 1. ROC

> **Propriété 2.** On considère une repère cartésien $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé et le repère polaire $(O;\vec{i})$. Soit M un point du plan, on note $(x;y)$ ses coordonnées cartésiennes et $(\rho;\theta)$ ses coordonnées polaires. Montrer que : $x=\rho\cos\theta \qquad y=\rho\sin\theta$

$\rho = OM = \sqrt{x^2+y^2}$. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathscr{C}$ en N.
Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires et de même sens donc

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \theta$$

Le point N, image du réel θ sur le cercle $\mathscr{C}$, a pour coordonnées $(\cos\theta;\sin\theta)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$. Or $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{ON}$ donc les coordonnées de M sont $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, c'est-à-dire $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$

Exercice 2. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A et B dont les coordonnées polaires (dans $(O;\vec{i})$) sont :

$$A(2;0) \qquad\qquad B\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$$

On considère également le point C dont les coordonnées cartésiennes sont : $C(-\sqrt{3};-1)$

1. Donner les coordonnées cartésiennes de A, puis celle de B
2. Calculer les coordonnées polaires de C
3. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Prouver le)

L'exercice a déjà été corrigé en classe ...