

Devoir surveillé 7: Suites

Exercice 1. ROC

(2 points)

Démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1 : Somme des n premiers entiers**

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2.

(3 points)

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2009 + 2010$$

$$S_2 = 18 + 54 + 162 + \cdots + 39\,366$$

On prendra soin de rédiger la réponse clairement. Notamment, on justifiera la formule utilisée en précisant la suite considérée ainsi que sa nature.

Exercice 3.

(3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r . On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0 .
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100}$

Exercice 4.

(4 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500€. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.

On note (C_n) la suite des primes avec $C_1 = 500$.

1. Calculer C_2 puis C_3 .
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire la nature de la suite (C_n) .
3. La suite (C_n) est-elle convergente? (On justifiera la réponse par un résultat du cours).
4. Un ingénieur compte rester 20 ans dans l'entreprise. Calculer la prime qu'il touchera la 20^{ème} année.

Exercice 5.

(4 points)

1. Etudier le sens de variation des suites de terme général suivant :

(a) $u_n = n^2 - n$ pour $n \in \mathbb{N}$

(b) $v_n = \frac{2^n}{n}$ pour $n \geq 2$

2. Etudier la limite des suites de terme général suivant :

(a) $w_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

(b) $t_n = \frac{5n^5 - 8n^4 - 9}{6n^5 + 5n^3 - n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 6.

(4 points)

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ est la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout entier naturel n .

Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .
(b) Calculer v_0 et v_1 .
2. (a) Montrer que v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
(b) En déduire v_n en fonction de n .
3. (a) Exprimer u_n en fonction de v_n .
(b) En déduire u_n en fonction de n . Que vaut u_5 ?

Exercice 7.

(Bonus)

« Le premier jour du mois, je gagnais 2 centimes, le deuxième jour du mois je gagnais 4 centimes, le troisième jour je gagnais 8 centimes, etc..., en doublant d'un jour à l'autre. A la fin du mois, j'avais gagné environ un milliard de centimes ! C'était vers la fin des années 60 ».

En quelle année était-ce ?