

## DS 7 : Probabilités

### Exercice 1. ROC

(2 points)

Démontrer le théorème suivant :



#### Théorème 1 :

La probabilité de la réunion de deux événements  $A$  et  $B$  est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Remarque :** Pour cette démonstration on admet et on pourra utiliser les deux propriétés suivantes :

1. Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2.  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

### Exercice 2.

(4 points)

Arthur possède quatre escargots de compétition spécialement nourris et entraînés pour la course de vitesse.

- Dossard n°1 : Pouf Pouf
- Dossard n°3 : Miaou Miaou
- Dossard n°2 : Ouaf Ouaf
- Dossard n°4 : Cui Cui

On sait que, pour toute course, ces escargots ont des probabilités de l'emporter telles que :

$$P(1) = P(2) \quad ; \quad P(2) = 3P(3) \quad ; \quad P(3) = \frac{4}{3}P(4)$$

1. Quelle est la probabilité que Pouf Pouf remporte une course ?
2. Aujourd'hui, Arthur organise 5 courses entre ces 4 escargots. Quelle est la probabilité que :
  - (a) Pouf Pouf les remporte toutes ?
  - (b) Pouf Pouf n'en remporte aucune ?
  - (c) Pouf Pouf en remporte au moins une ?

### Exercice 3.

(6 points)

Une urne  $U_1$  contient trois boules noires et sept boules blanches.Une urne  $U_2$  contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

1. Faire un arbre illustrant cette expérience aléatoire.
2. En déduire le cardinal de l'univers.
3. Soient les événements suivants :
  - $A$  = « Obtenir deux boules blanches sachant que l'urne  $U_1$  a été choisie »
  - $B$  = « Obtenir deux boules de mêmes couleurs »
  - $C$  = « Obtenir au moins une boule blanche »
 Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$ .
4. Décrire l'événement  $\bar{C}$  et calculer  $P(\bar{C})$ .  
En déduire de  $P(C)$ .
5. Décrire l'événement  $B \cap C$  et en déduire  $P(B \cap C)$ .
6. Décrire l'événement  $B \cup C$  et déduire de la question précédente  $P(B \cup C)$ .  
Auriez-vous pu trouver ce résultat sans calcul supplémentaire ? Expliquer.

**Exercice 4.**

(8 points)

Une boîte contient six boules rouges et  $n$  boules blanches. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, deux boules de la boîte. Si les deux boules ont la même couleur, le joueur gagne 1€ ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1€. On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique du joueur.

1. On suppose que  $n = 3$ .

(a) Calculer les probabilités d'obtenir deux boules :

i. de même couleur

ii. de couleurs différentes

(b) Décrire alors sous forme d'un tableau la loi de la variable aléatoire  $X$ .

(c) Calculer alors  $E(X)$  et  $\sigma(X)$ .

(d) Le jeu est-il équitable ? Est-il risqué ? (Justifier)

2. On suppose désormais que  $n \geq 2$ .

(a) Exprimer en fonction de  $n$  les probabilités des événements  $(X = 1)$  et  $(X = -1)$

(b) Montrer que l'espérance mathématique  $E(X)$  est telle que

$$E(X) = \frac{n^2 - 13n + 30}{(n + 6)(n + 5)}$$

(c) Pour quelles valeurs de  $n$  le jeu est-il équitable ?

(d) Pour quelles valeurs de  $n$  le jeu est-il défavorable ?

**Exercice 5.** (Bonus)

(1 point)

Au jeu des petits chevaux, pour pouvoir placer son cheval sur la case de départ, il faut, avec un dé que l'on suppose équilibré, obtenir un 6. Si on n'obtient pas de 6 on passe son tour. Calculer la probabilité de placer son cheval sur la case de départ : au premier lancé, au second puis au sixième.