

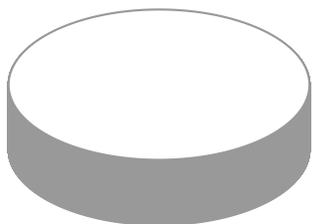
DM 6 : Dérivations

Exercice 1. Le but du problème est de déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin x$. Calculer $f'(0)$
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Exercice 2. Un industriel désire commercialiser des boîtes (cylindriques) de flageolets d'une contenance V égale à 400 cm^3 . Il se demande quel est le format de la boîte qui nécessitera le moins de matière première, ceci afin d'avoir un coût de production le plus faible possible.



*Plutôt larges et basses
ou
plutôt fines et hautes ?*



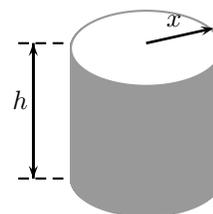
En pratique, les boîtes de conserve sont fabriquées à partir de plaques de fer dans lesquelles sont découpés des « patrons » qui sont ensuite recourbés puis soudés

0. Dessiner le patron d'une boîte de conserve de forme cylindrique

Partie A : Calcul de la surface de fer nécessaire pour fabriquer la boîte

1. Calculer, l'aire du fond, du couvercle et de la partie latérale de la boîte en fonction du rayon x et de la hauteur h de la boîte. (On suppose $x > 0$ et $h > 0$)
2. En déduire que l'aire totale de la boîte est égale à $A(x) = 2\pi xh + 2\pi x^2$
3. Calculer, en fonction de x et de h le volume V de la boîte.
4. Sachant que $V = 400 \text{ cm}^3$, déduire des questions précédentes que l'aire $A(x)$ vaut :

$$A(x) = \frac{800}{x} + 2\pi x^2$$



Partie B : Etude de la fonction A

1. Etudier les limites de la fonction A en 0^+ et en $+\infty$
2. Calculer $A'(x)$. Démontrer que $A'(x) \geq 0 \iff x \geq \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ (1)
3. En déduire le tableau de variation de la fonction A . Préciser la valeur x_m pour laquelle la fonction A admet un minimum.
4. Tracer la représentation graphique de la fonction A sur l'intervalle $]0; 10]$.
5. A l'aide de la question 3. de la partie A, déterminer la hauteur h_0 optimale de la boîte.
6. Démontrer que $h_0 = 2x_m$. Conclure.

1. On admettra que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, déjà rencontrée au travers d'un DM, est croissante sur \mathbb{R}