DM 5 : LES LIMITES

1 Théorème de majoration

THÉORÈME 1. *Admis*

Soient f , u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a; +\infty[$:

- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 1.

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Poser $v(x) = -x + 1$)
2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

2 Théorème des gendarmes

THÉORÈME 2. *Admis*

Soient f , u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a; +\infty[$.

Si pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3 Formes indéterminées

Exercice 3. Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 2x^3 + 5x - 1$