

## DM 3 : SECOND DEGRÉ ET FONCTIONS POLYNÔMES

**Exercice 1.** Résoudre le système  $(\mathcal{S})$ , i.e trouver tous les couples  $(x; y)$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que : <sup>(1)</sup>

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

**Exercice 2.**  $ABCD$  est un rectangle de largeur  $x$  et de longueur  $1 - x$  (avec  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ )

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  l'aire du rectangle est-elle égale à  $\frac{2}{9}$
2. Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  l'aire du rectangle est-elle maximale ?

**Exercice 3.**

**Partie A :** Résolution d'une équation de degré 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 + 3x - 4$$

1. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  <sup>(2)</sup>
2. Tracer la représentation graphique  $C_f$  de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal
3. À l'aide du graphique déterminer les coordonnées du point  $A$  d'intersection de  $C_f$  avec l'axe des abscisses, puis confirmer le résultat par le calcul.
4. En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  que l'on précisera

**Partie B :** Où l'on établit une égalité

**Définition :** La racine cubique d'un nombre réel  $a$  est l'unique nombre réel  $b$ , noté  $\sqrt[3]{a}$ , qui élevé au cube donne  $a$ . En d'autres termes :  $a = b^3 \iff b = \sqrt[3]{a}$  <sup>(3)</sup>

Le but de cette partie est d'établir l'égalité suivante :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

1. Démontrer que, pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{puis que} \quad a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

2. On pose  $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$  et  $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ .  
Calculer  $\alpha^3 + \beta^3$  puis  $\alpha \times \beta$  <sup>(4)</sup>

3. Déduire de 1 et 2 que le réel  $\alpha + \beta$  est solution de l'équation  $x^3 + 3x - 4 = 0$
4. À l'aide de la **Partie A**, conclure.

---

1. On ramènera l'étude de ce problème à la recherche des racines d'un trinôme du second degré  
 2. On rappelle que la somme de deux fonctions strictement croissantes est une fonction strictement croissante  
 3. Exemple :  $\sqrt[3]{8} = 2$  car  $2 \times 2 \times 2 = 8$ , de même  $\sqrt[3]{-27} = -3$  car  $(-3) \times (-3) \times (-3) = -27$ , et surtout  $(\sqrt[3]{a})^3 = a$   
 4. On admet que  $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$