

Correction des Olympiades de Mathématiques

Exercice 1. La rosace

1. Comme ce motif doit apparaître 6 fois dans la rosace, l'angle cherché vaut :

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

2. (a) De la question précédente on déduit les angles suivants :

$$\widehat{BAD} = \frac{\pi}{6} \quad \widehat{BCD} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Par conséquent le triangle BCD est un triangle isocèle $BC = CD$ qui possède un angle qui mesure $\frac{\pi}{3}$, il s'agit donc d'un triangle équilatéral. De plus l'angle $\widehat{BDA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, ce qui montre que le triangle ABD est isocèle et donc que

$$AB = BD = BC$$

- (b) Pour pouvoir répondre à cette question il faut considérer que B est sur le petit et le grand cercle, la figure de l'énoncé laissant planer le doute. Dans ce cas, en notant C' le centre du petit cercle, D' le point d'intersection de la tangente et du petit cercle, puis B' le point diamétralement opposé à B sur le petit cercle, on démontre exactement comme dans la question précédente que

$$AB' = B'C' = C'D = r$$

où r désigne le rayon du petit cercle. Par conséquent comme on a aussi

$$BC = DC = R = AB$$

où R désigne le rayon du grand cercle, on obtient :

$$R = AB = AB' + B'C' + C'D = r + r + r = 3r$$

- (c) L'architecte désire donc construire sa rosace de telle manière que $AD = 3\sqrt{3}$. D'après Pythagore dans le triangle rectangle ADC , on a :

$$AD^2 + DC^2 = AC^2 \iff R = 3$$

Donc il doit choisir 3 pour le rayon du grand cercle et 1 pour celui du petit.

3. Calculons pour commencer l'aire de la partie colorée incluse dans le triangle rectangle ADC . L'aire du triangle rectangle en D' est :

$$\frac{AD' \times D'C}{2} = \frac{AD'}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

car d'après Pythagore $AD'^2 = AC'^2 - D'C'^2 = 4 - 1 = 3 \iff AD' = \sqrt{3}$ Le secteur d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ($BC'D'$) représente le tiers du petit cercle et a donc pour aire

$$\frac{2\pi}{3} \times r = \frac{2\pi}{3}$$

Le secteur d'angle $\frac{\pi}{3}$ (BCD) représente le sixième du grand cercle et a donc pour aire

$$\frac{\pi}{3} \times R = \frac{3\pi}{3} = \pi$$

De plus l'aire de ACD est :

$$\frac{AD \times DC}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

L'aire de la partie colorée incluse dans le triangle rectangle ACD est donc :

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La partie dont on a calculé l'aire apparaît 12 fois dans la rosace donc l'aire de la partie colorée de la rosace vaut :

$$12 \times \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Exercice 2. A la recherche du « chaînonze »

1. On peut par exemple ajouter 6 et la chaîne 75946 est un chaînonze. En effet, 759, 594 et 946 sont divisibles par 11 ($9+6-4=11$).

En raisonnant de manière plus formelle, si on note a le chiffre que l'on ajoute au chaînonze 7594, alors la chaîne 7594 a est un chaînonze si et seulement si

$$9 + a - 4 = 0 \text{ ou } 11 \iff a = -5 \text{ ou } a = 6$$

Le seul chiffre correct est donc 6.

2. Nommons b le chiffre tel que 75946 b soit un chaînonze. Alors :

$$4 + b - 6 = 0 \text{ ou } 11 \iff b = 2 \text{ ou } 13$$

Ici encore on peut prolonger le chaînonze en ajoutant simplement un chiffre : 2.

En poursuivant un raisonnement identique, notons c le chiffre tel que 759462 c soit un chaînonze. Alors :

$$6 + c - 2 = 0 \text{ ou } 11 \iff c = -4 \text{ ou } c = 7$$

Ici encore et toujours on peut prolonger le chaînonze en ajoutant simplement un chiffre : 7.

En poursuivant un raisonnement identique, notons d le chiffre tel que 7594627 d soit un chaînonze. Alors :

$$2 + d - 7 = 0 \text{ ou } 11 \iff d = 5 \text{ ou } d = 16$$

Ici encore et toujours on peut prolonger le chaînonze en ajoutant simplement un chiffre : 5.

On s'aperçoit qu'à chaque ajout la nouvelle chaîne est un chaînonze si et seulement si les trois derniers chiffres de la chaîne forment un nombre divisible par 11. Par conséquent comme 75946 est un chaînonze, il en est de même pour 759462759462. Autrement dit le nombre

$$759462759462 \text{ est un chaînonze.}$$

Si l'on rajoute à la chaîne précédente 759642 on obtient encore un chaînonze, puisqu'on tous les nombres formé de trois termes consécutifs sont identiques à ceux du chaînonze précédent.

Comme 2010 est divisible par 3 et par 2, 2010 est un multiple de 6, par conséquent on peut prolonger la chaîne précédente en ajoutant $\frac{2010}{6}$ fois la chaîne 759462 et on obtient un chaînonze dont le 2010^e chiffre est 2.

3. En raisonnant comme dans la question précédente, on trouve que la chaîne 09 se prolonge infiniment de la forme

$$0990220990220 \dots$$

En revanche la chaîne 91 se prolonge de manière finie en le chaînonze 9132. En effet si on note e le chiffre tel que $9132e$ soit un chaînonze i.e tel que :

$$3 + e - 2 = 0 \text{ ou } 11 \iff e = -1 \text{ ou } e = 10$$

On s'aperçoit qu'il n'existe pas de e tel que $9132e$ soit un chaînonze.

4. (a) Soit f un chiffre. aaf est un chaînonze si et seulement si $f + a - a = 0$ ou $11 \iff f = 0$ ou $f = 11$. Autrement dit la chaîne aa se prolonge en un chaînonze en ajoutant le seul chiffre 0.
- (b) Soit f un chiffre. La chaîne $aa - 1f$ est un chaînonze si et seulement si $a + f - (a - 1) = 0$ ou $11 \iff f = -1$ ou $f = 10$. Autrement dit si $b = a - 1$ la chaîne ab ne se prolonge pas en un chaînonze.
- (c) Soit f un chiffre. abf est un chaînonze si et seulement si

$$f + a - b = 0 \text{ ou } 11 \iff f = b - a \text{ ou } f = 11 + b - a$$

Dans le tableau suivant, analysons les cas possibles où $f = b - a$

$\begin{array}{c} \backslash \\ b \end{array} \begin{array}{c} a \\ \end{array}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
7	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Par exemple on 352 est un chaînonze. On dénombre 50 chaînonze dans le cas où $f = b - a$.

Dans le tableau suivant, analysons les cas possibles où $f = 11 + b - a$:

$\begin{array}{c} \backslash \\ b \end{array} \begin{array}{c} a \\ \end{array}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
2	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
3	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
4	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
5	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
6	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
7	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
8	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
9	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

Par exemple on 528 est un chaînonze.

5. Traitons le cas $aa0$. Soit f un chiffre. La chaîne $aa0f$ est un chaînonze si et seulement si :

$$f + a - 0 = 0 \text{ ou } 11 \iff f = -a \text{ ou } f = 11 - a$$

Lorsque $a = 1$ le chaînonze $aa0$ ne se prolonge pas.

Lorsque $a = 0$, le chaînonze se prolonge infiniment en ajoutant toujours 0, ce qui en fait un chaînonze 1-périodique.

Si $a \geq 2$ alors $f = 11 - a$. La chaîne est de la forme $aa0(11 - a)$. En poursuivant un raisonnement identique on trouve que le chiffre suivant est de nouveau $11 - a$. En poursuivant de nouveau un raisonnement identique on trouve que les trois chiffres suivants sont $0aa$ ce qui prouve que le chaînonze est 6-périodique. Bien, on a traité le cas aa complètement. Poursuivons.

Notons que le cas $a(a - 1)$ a été traité entièrement dans la question 4.b..

Traitons le cas des chaînonzes de la forme $a(a - n)$ avec $2 \leq n \leq a$. En observant attentivement le tableau on s'aperçoit que le chiffre suivant est :

$$(11 - n)$$

En raisonnement comme on le fait depuis le début de l'exercice on trouve les chiffres suivants : $(11 - a)(11 + n - a)(n)(a)(a - n) \dots$. Dans le cas où tous ces nombres existent, le chaînonze est clairement 6-périodique. En revanche $(11 + n - a)$ n'est pas un chiffre si $n = a$ ou si $n = a - 1$, ce qui montre que dans ce cas le chaînonze est fini.

Traitons enfin le cas où b est plus grand que a i.e la chaîne $(b - n)b$ avec $2 \leq n \leq b$. En raisonnement, toujours de manière identique on trouve que les chiffres suivants sont :

$$(n)(11 - b + n)(11 - b)(11 - n)(b - n)b$$

Dans le cas où tous ces nombres existent, le chaînonze est clairement 6-périodique. En revanche $(11 - b + n)$ n'est pas un chiffre si $n = b$ ou si $n = 1 + b$, ce qui montre que dans ce cas le chaînonze est fini.

Exercice 3. Damiers tronqués et Triminos

1. La première question se fait à l'aide de quelques tentatives et d'un joli dessin.
2. Pour $n = 4$ on exploite le damier que l'on a appris à recouvrir à la question précédente, i.e celui qui est tronqué. On le recouvre. On essaye ensuite de placer un trimino de manière à exploiter de nouveau le damier que l'on a appris à recouvrir.
3. Si le damier a 2^{n+1} cases par côté, alors on partage en 4 le damier. On sait recouvrir la partie contenant la case tronquée. On place ensuite un trimino couvrant l'angle du damier recouvert. Et on recouvre les trois autres parties en utilisant nos connaissances sur les damiers possédant 2^n cases.
4. On a vu dans les questions précédentes que l'on savait recouvrir par des triminos tout damier possédant 2^n cases par côté i.e possédant $2^n \times 2^n - 1$ cases i.e possédant $2^{2n} - 1$ cases. Comme on recouvre $2^{2n} - 1$ cases par des triminos, ce nombre est divisible par 3. En choisissant n tel que

$$2n = 2^{2010} \iff n = 2^{2009}$$

On obtient $2^{2^{2010}} - 1$ est divisible par 3.