Correction du devoir Maison 2 : Les barycentres

Exercice 1. ABC est un triangle équilatéral

1. Soit G le barycentre de $\{(A,2);(B,3)\}$ et G' le barycentre de $\{(A,3);(C,2)\}$.
   alors : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG'}$
   par conséquent $\|\ 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\ \|=\|\ 3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\ \| \Longleftrightarrow \|\ 5\overrightarrow{MG}\ \|=\|\ 5\overrightarrow{MG'}\ \| \Longleftrightarrow \|\ \overrightarrow{MG}\ \|=\|\ \overrightarrow{MG'}\ \|$
   Les points M cherchés sont donc ceux de la médiatrice du segment $[GG']$.
2. Soit H le barycentre de $\{(A,2);(B,3),(C,2)\}$. On a alors : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=7\overrightarrow{MH}$ Attention, comme $1+2-3=0$ on ne peut pas introduire le barycentre de $\{(A,1);(B,-3),(C,2)\}$, en revanche on a :

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$$

   Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis E le symétrique de A par rapport *à* D, on a :

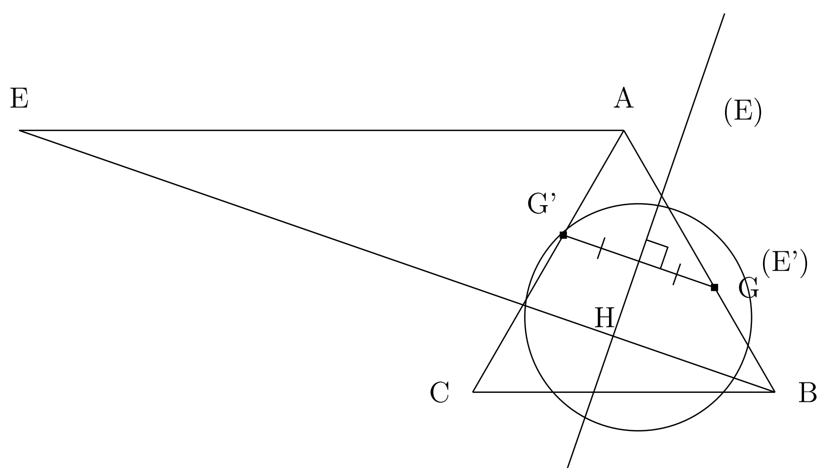
$$\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$$

   Par conséquent on a :

$$\|\ 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MB}\ \|=\|\ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MB}\ \| \Longleftrightarrow \|\ 7\overrightarrow{MH}\ \|=\|\ \overrightarrow{BE}\ \| \Longleftrightarrow MH=\frac{1}{7}BE$$

   Les points M sont ceux du cercle de centre H et de rayon $\dfrac{1}{7}BE$

On a représenté l'ensemble (E) solution de la question 1., puis l'ensemble (E') solution du 2. :



Exercice 2. $ABCD$ est un quadrilatère. G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[BC]$ dans cet ordre.
L est le barycentre de $\{(A;1),(D;3)\}$ et K celui de $\{(C;1),(D;3)\}$
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourrantes.
Pour cela on utilisera le barycentre H de $\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;3)\}$

1. Comme $L=bar\{(A;1),(D;3)\}$ on a $\overrightarrow{AL}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et comme $K=bar\{(C;1),(D;3)\}$ on a : $\overrightarrow{CK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

2. Comme G est le centre de gravité de ABC, on a G isobarycentre de A, B et C donc :

$$G = bar\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$$

D'après l'associativité du barycentre on obtient :

$$H = bar\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;3)\} \Longleftrightarrow H = bar\{(G;3),(D;3)\}$$

3. On sait que $H = bar\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;3)\}$. Comme J est le milieu de $[BC]$, il est aussi l'isobarycentre de C et B, donc $J = bar\{(C;1),(B;1)\}$, on utilise alors l'associativité du barycentre et on obtient :

$$H = bar\{(J;2),(A;1),(D;3)\}$$

On sait aussi que $L = bar\{(A;1),(D;3)\}$, on en conclut :

$$H = bar\{(J;2),(L;4)\}$$

4. On sait que $H = bar\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;3)\}$. Comme I est le milieu de $[AB]$, il est aussi l'isobarycentre de A et B, donc $I = bar\{(A;1),(B;1)\}$, on utilise alors l'associativité du barycentre et on obtient :

$$H = bar\{(I;2),(C;1),(D;3)\}$$

On sait aussi que $K = bar\{(C;1),(D;3)\}$, on en conclut :

$$H = bar\{(I;2),(K;4)\}$$

5. D'après la question 2

$$H = bar\{(G;3),(D;3)\} \Longrightarrow H \in (DG)$$

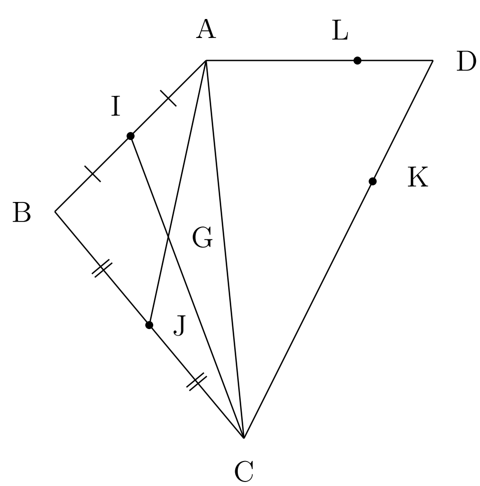
D'après la question 3

$$H = bar\{(J;2),(L;4)\} \Longrightarrow H \in (JL)$$

D'après la question 4

$$H = bar\{(I;2),(K;4)\} \Longrightarrow H \in (IK)$$

Par conséquent les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourrantes en H



<u>Exercice</u> 3. Dans un triangle ABC on note A', B' et C' les milieux des côtés opposés à A, B et C et L et M définis par L milieu de $[B'C]$ et M symétrique de C' par rapport à B.

1. Puisque M est le symétrique de C' par rapport *à* B, on a
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{C'B} \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
Par conséquent $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$
$\Longleftrightarrow -\frac{3}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$
$\Longleftrightarrow -3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$
$\Longleftrightarrow M = bar\{(B,-3);(A,1)\}$
De plus comme L est le milieu de $[B'C]$, L est l'isobarycentre de B' et C et donc $L = bar\{(B',1);(C,1)\}$ et $B' = bar\{(A,1);(C,1)\}$ (B' milieu de $[AC]$), donc d'après l'associativité du barycentre on conclut :
$$L = bar\{(B',1);(C,1)\} \Longleftrightarrow L = bar\{(B',2);(C,2)\} \Longleftrightarrow L = bar\{(A,1);(C,1);(C,2)\} = bar\{(A,1);(C,3)\}$$

2. $$2\overrightarrow{A'L} + \overrightarrow{A'M} = 2\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM}$$
Or $M = bar\{(A,1);(B,-3)\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $L = bar\{(A,1);(C,3)\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
donc :
$$2\overrightarrow{A'L} + \overrightarrow{A'M} = 3\overrightarrow{A'A} + 2\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{A'A} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$
Enfin, puisque A' est le milieu de $[BC]$ on a : $A' = bar\{(B,1);(C,1)\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$ $\forall M \in \mathbb{P}$. En particulier pour $M = A$ il vient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$ Nous pouvons donc conclure
$$2\overrightarrow{A'L} + \overrightarrow{A'M} = 3\overrightarrow{A'A} + \frac{3}{2}(2\overrightarrow{AA'}) = 3(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AA'}) = 3\overrightarrow{A'A'} = \overrightarrow{0}$$

3. L'égalité précédente montre que
$$2\overrightarrow{A'L} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow 2\overrightarrow{A'L} = \overrightarrow{MA'}$$
Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{A'L}$ et $\overrightarrow{MA'}$ sont colinéaires, ce qui prouve que A', L et M sont alignés.

Exercice 4.

1. Comme ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles de l'espace ayant même sens de gravité G, on a :
$$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
et
$$G = bar\{(A',1);(B',1);(C',1)\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{0}$$
On obtient : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$
2. Soit ABC un triangle. On considère les points D, E, F barycentres respectifs de $(A,1)$ et $(B,1)$, de $(A,3)$ et $(C,-1)$, de $(B,3)$ et $(C,1)$.

(a) On sait que $D = bar\{(A,1);(B,1)\} = bar\{(A,1.5);(B,1.5)\}$, puis on sait que $F = bar\{(B,3);(C,1)\} = bar\{(B,-1,5);(C,-0,5)\}$ D'apr$\grave{e}s$ l'associativité du barycentre on a :

$$bar\{(D,3);(F,-2)\} = bar\{(A,1.5);(B,1.5);(B,-1,5);(C,-0,5)\}$$

$$= bar\{(A,3);(B,3);(B,-3);(C,-1)\} = bar\{(A,3);(C,-1)\} = E$$

Ci dessous une explication plus détaillé « du départ des B » :
Notons $E' = bar\{(A,3);(B,3);(B,-3);(C,-1)\}$ et montrons que $E' = bar\{(A,3);(C,-1)\}$

$$E' = bar\{(A,3);(B,3);(B,-3);(C,-1)\} \Longleftrightarrow 3\overrightarrow{E'A} + 3\overrightarrow{E'B} - 3\overrightarrow{E'B} - \overrightarrow{E'C} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow 3\overrightarrow{E'A} - \overrightarrow{E'C} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow E' = bar\{(A,3);(C,-1)\$$$

(b) Puisque $bar\{(D,3);(F,-2)\} = E$ alors $E \in (DF)$ et donc D, E, et F sont alignés.