# Correction du devoir Maison 1 : Les fonctions

**Exercice 1.** On considère deux fonctions $f$ et $g$ définies par $f : x \longmapsto 4 - 3(x-1)^2$ et $g : x \longmapsto 8 + \dfrac{2}{x-1}$.

1. $f(x)$ est calculable $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
   $g(x)$ est calculabe pour $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$ donc $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$
2. $f(x) = 4 - 3 \times u \circ v(x)$ où $v(x) = x - 1$ et $u(x) = x^2$.
   Sens de variation de $u \circ v$ :
   Sur $]-\infty; 1]$ : la fonction $v$ est une fonction **strictement croissante**.
   De plus $v\left(]-\infty;1]\right) = \mathbb{R}^-$. En effet si $x \in ]-\infty;1]$ alors $x \leq 1 \iff x - 1 \leq 0$
   Sur $\mathbb{R}^-$ la fonction $u$ est **strictement décroissante**, on en conclut :

   $u \circ v$ est une fonction **strictement décroissante** sur$]-\infty;1]$

   Sur $[1;+\infty[$ : la fonction $v$ est une fonction **strictement croissante**.
   De plus $v\left([1;+\infty[\right) = \mathbb{R}^+$. En effet si $x \in [1;+\infty[$ alors $x \geq 1 \iff x - 1 \geq 0$
   Sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $u$ est **strictement croissante**, on en conclut :

   $u \circ v$ est une fonction **strictement croissante** sur $[1;+\infty[$

   Sens de variation de $f$
   La fonction $-3u \circ v$ est donc une fonction **strictement décroissante sur** $]-\infty;1]$ et **strictement croissante sur** $[1;+\infty[$ (en effet $-3 < 0$), et donc la fonction $f$ a les mêmes variations que la fonction $4 - 3u \circ v$, i.e :
   f est **strictement décroissante sur** $]-\infty;1]$ et **strictement croissante sur** $[1;+\infty[$
3. $g(x) = 8 + 2 \times u \circ v(x)$ où $v(x) = x - 1$ et $u(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Sens de variation de $u \circ v$ :
   Sur $]-\infty;1[$ : la fonction $v$ est une fonction **strictement croissante**.
   De plus $v\left(]-\infty;1[\right) = \mathbb{R}^-$. En effet si $x \in ]-\infty;1[$ alors $x < 1 \iff x - 1 < 0$
   Sur $\mathbb{R}^{-*}$ la fonction $u$ est **strictement décroissante**, on en conclut :

   $u \circ v$ est une fonction **strictement décroissante** sur$]-\infty;1[$

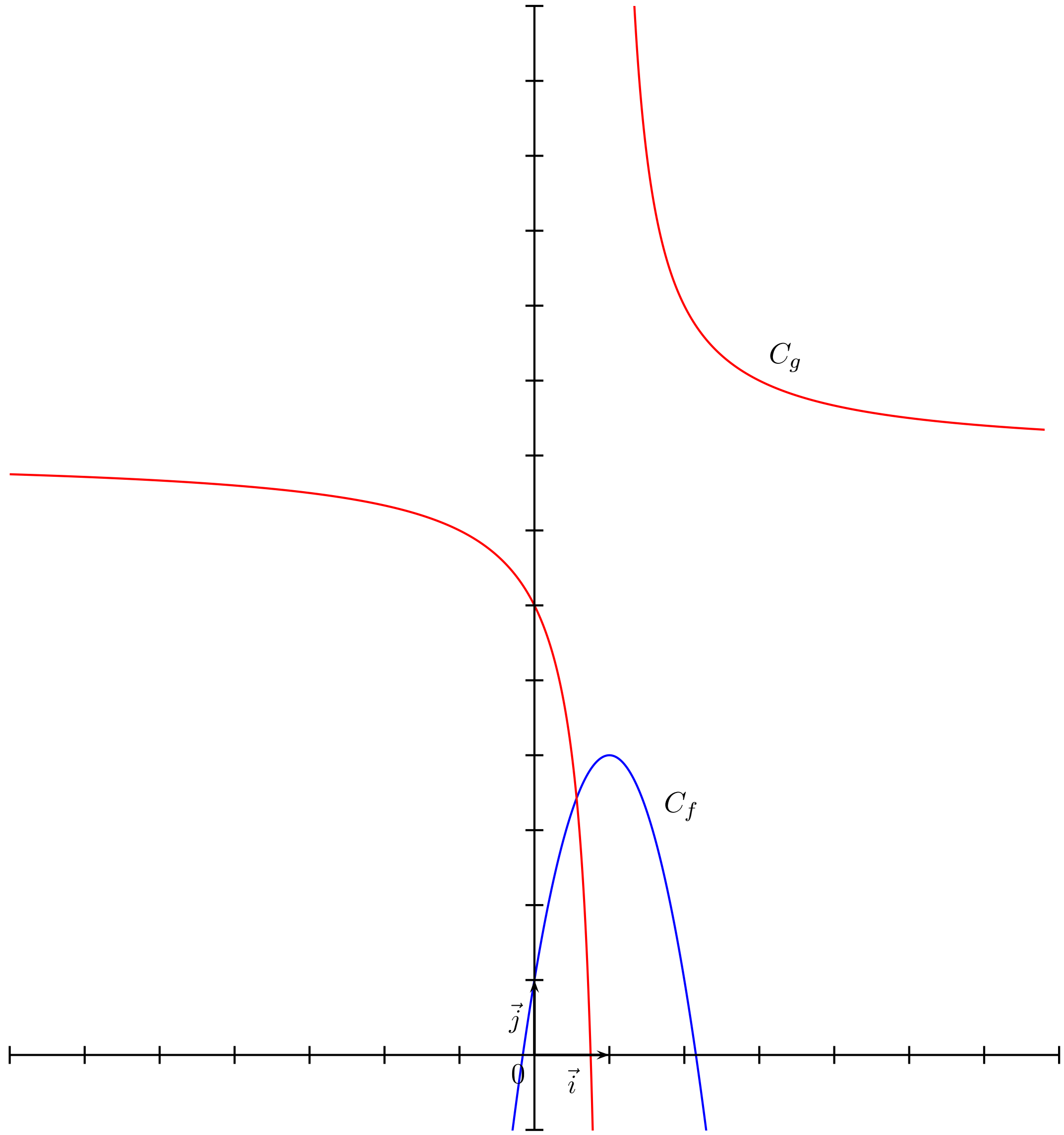
   Sur $]1;+\infty[$ : la fonction $v$ est une fonction **strictement croissante**.
   De plus $v\left(]1;+\infty[\right) = \mathbb{R}^+$. En effet si $x \in ]1;+\infty[$ alors $x > 1 \iff x - 1 > 0$
   Sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction $u$ est **strictement décroissante**, on en conclut :

   $u \circ v$ est une fonction **strictement décroissante** sur $]1;+\infty[$

   Sens de variation de $f$
   La fonction $2u \circ v$ est donc une fonction **strictement décroissante sur** $]-\infty;1[$ et **strictement décroissante sur** $]1;+\infty[$ (en effet $2 > 0$), et donc la fonction $f$ a les mêmes variations que la fonction $8 + 2u \circ v$, i.e :
   f est **strictement décroissante sur** $]-\infty;1[$ et **strictement décroissante sur** $]1;+\infty[$
4. On déduite de 3 :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de f | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ |

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de g | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ |




5

6 On note $h_1 : x \longmapsto f(x) - 2$ et $h_2 : x \longmapsto -f(x)$

(a) Les variations de $h_1$ sont les mêmes que celle de $f$ puisque $h_1 = f - 2$ donc son tableau de variation est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $h_1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ |

(b) Les variations de $h_2$ sont contraires à celle de $f$ puisque $h_2 = -f$ donc son tableau de variation est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $h_2$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ |

(c) On obtient la représentation graphique de $h_1$ par translation de vecteur $-2\vec{j}$ en partant de $C_f$ et celle de $h_2$ est le symétrique de $C_f$ par rapport *à* l'axe des abscisses.

7 On note $m_1 : x \longmapsto g(x) + 7$ et $m_2 : x \longmapsto g(x + 7)$

(a) Les variations de $m_1$ sont les mêmes que celle de $g$ puisque $m_1 = g + 7$ donc son tableau de variation est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $m_1$ | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ |

(b) Le tableau de variation de $m_2$ est : (translation de vecteur $-7\vec{i}$)

| $x$ | $-\infty$ | $-6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $m_2$ | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ |

(c) On obtient la représentation graphique de $m_1$ par translation de vecteur $7\vec{j}$ en partant de $C_g$ et celle de $m_2$ par translation de vecteur $-7\vec{i}$ en partant de $C_g$

8 On note $k : x \longmapsto \dfrac{2f(x) - 6f(-x)}{3}$.

$k(1) = \dfrac{2f(1) - 6f(-1)}{3} = \dfrac{8 - 6 \times (-8)}{3} = \dfrac{8 + 48}{3} = \dfrac{56}{3}$. En revanche :

$k(-1) = \dfrac{2f(-1) - 6f(1)}{3} = \dfrac{2 \times (-8) - 6 \times 4}{3} = \dfrac{-16 - 24}{3} = -\dfrac{40}{3}$

On a donc trouvé un réel (1) tel que $k(x) \neq k(-x) \Longrightarrow f$ n'est pas paire

et on a trouvé un réel (1) tel que $k(x) \neq -k(-x) \Longrightarrow f$ n'est pas impaire.

On ne peut donc rien en déduire sur des symétries éventuelles de la courbe ...

**<u>Exercice</u> 2.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(\mid -x \mid) = g(\mid x \mid) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

La fonction $g \circ f$ est donc paire.

2. Considérons $f : x \longmapsto -4x + 1$ et $g : x \longmapsto \mid x \mid$ alors : $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(-3) = 3$ et $g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(5) = 5$, ainsi dans ce cas la fonction $g \circ f$ est ni paire ni impaire.

En considérant $f = g$ on a $g \circ f$ paire

En revanche, peut-on obtenir $g \circ f$ impaire, i.e peut-on avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ g \circ f(-x) = -g \circ f(x)$$

On a $g \circ f(-x) = \mid f(-x) \mid$ et $g \circ f(x) = \mid f(x) \mid$.

Pour avoir $\mid f(-x) \mid = - \mid f(x) \mid$ il faut $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0$

En conclusion tous les cas peuvent se produire

3. Comme $f$ est paire on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$
   La fonction $g \circ f$ est donc paire.
4. Considérons $f : x \longmapsto x^3$ et $g : x \longmapsto x + 1$
   (on a bien $f$ impaire $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$)
   Alors : $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 2$ et $g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(-1) = 0$. Dans ce cas $g \circ f$ n'est ni paire ni impaire.
   Avec pour $f$ la fonction cube et pour $g$ la fonction cube il est facile de montrer que $g \circ f$ est impaire
   Enfin en considérant pour $f$ la fonction cube et pour $g$ la fonction carré, il est facile de montrer que $g \circ f$ est paire.
   En conclusion tous les cas de figure peuvent se produire.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $f$ est impaire on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$, donc :
   $$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x))$$
   De plus comme $g$ est impaire on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(-x) = -g(x)$, en particulier :
   $$g(-f(x)) = -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$
   En conclusion $\forall x \in \mathbb{R}$ $g \circ f(-x) = -g \circ f(x)$, donc $g \circ f$ est une fonction impaire.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $f$ est impaire on a $f(-x) = -f(x)$. Par conséquent :
   $$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x))$$
   De plus comme $g$ est paire on a $g(-x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$, en particulier : $g(-f(x)) = g(f(x))$.
   On conclut :
   $$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$
   La fonction $g \circ f$ est donc paire.