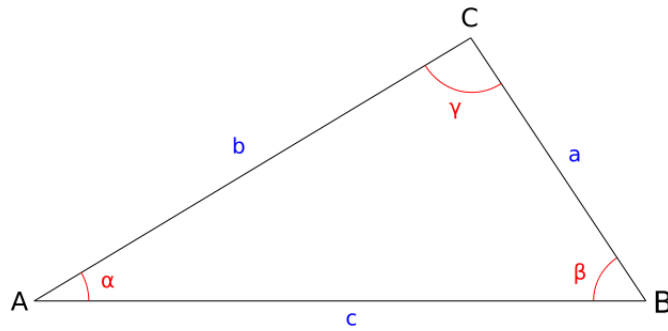


Correction du devoir Maison 9 : Produit Scalaire

Exercice 1. On se donne le triangle suivant, on note $\mathcal{A}$ son aire

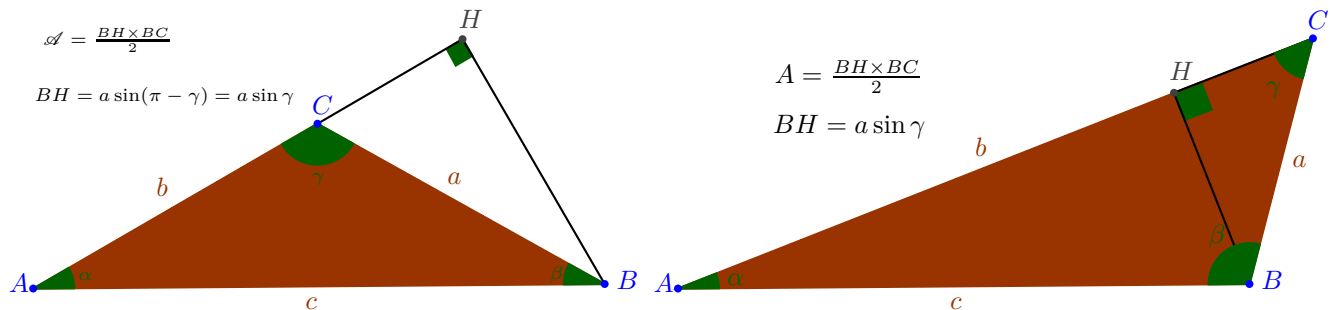


Le but du problème est de retrouver la formule de Héron, trouvée par Héron d'Alexandrie, qui permet de calculer l'aire d'un triangle quelconque en ne connaissant que les longueurs des trois côtés du triangle :

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{avec } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

s est le demi-périmètre du triangle, a , b et c sont les longueurs des côtés du triangle.

- Notons H le pied de la hauteur issue de B , dans ce cas : $\mathcal{A} = \frac{BH \times AC}{2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, comme en témoigne les deux cas de figure suivants :



Par conséquent $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{1}{2}ab \sqrt{(1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma)}$

- D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Par conséquent : $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ et donc :

$$1 - \cos \gamma = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab\sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab\sqrt{\left(\frac{2ab+c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)\left(\frac{2ab-c^2+a^2+b^2}{2ab}\right)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{(2ab+c^2-a^2-b^2)(2ab-c^2+a^2+b^2)}}{2ab} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab+c^2-a^2-b^2)(2ab-c^2+a^2+b^2)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{(c^2-(a^2-2ab+b^2))(-c^2+a^2+2ab+b^2)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)}
 \end{aligned}$$

3. De la question précédente on déduit immédiatement que :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)}$$

4. De plus : $s = \frac{1}{2}(a+b+c) \iff 2s = a+b+c$, puis :

$$2s - 2b = a + b + c - 2b = a - b + c$$

puis,

$$2s = a + b + c \iff 2s - 2a = b + c - a$$

, puis :

$$2s = a + b + c \iff 2s - 2c = a + b - c$$

Au final on obtient :

$$\boxed{2s = a + b + c \quad 2(s-b) = a - b + c \quad 2(s-a) = b + c - a \quad 2(s-c) = a + b - c}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{2s(2(s-c))(2(s-b))(2(s-a))} \\
 \mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{16s(s-c)(s-b)(s-a)} \\
 \mathcal{A} &= \frac{4}{4}\sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)} \\
 \mathcal{A} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
 \end{aligned}$$

5. A.N : Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 7, 12 et 18 cm.

$$\boxed{s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{7+12+18}{2} = \frac{37}{2} = 18,5}$$

Par conséquent

$$\mathcal{A} = \sqrt{18,5(18,5-7)(18,5-12)(18,5-18)} \simeq 26,3 \text{ cm}^2$$

Exercice 2. On considère un segment $[AB]$ tel que $AB = 6$ cm

1. Rechercher l'ensemble des points M du plan tels que $MA = 3MB$, représenter soigneusement cet ensemble en rouge.

On a :

$$\begin{aligned}
 & MA = 3MB \\
 \Leftrightarrow & MA^2 - 9MB^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0
 \end{aligned}$$

Considérons alors les barycentres G_1 et G_2 des points $(A, 1); (B, -3)$ et $(A, 1); (B, 3)$ on a alors :

$$(1 - 3)\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \quad \text{et} \quad (1 + 3)\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
 & MA = 3MB \\
 \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & -2\overrightarrow{MG_1} \cdot 4\overrightarrow{MG_2} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0
 \end{aligned}$$

Les droites (MG_1) et (MG_2) sont donc perpendiculaires, par conséquent M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[G_1G_2]$

2. Rechercher l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 10$, représenter soigneusement cet ensemble en bleu.

$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 10 \\
 \Leftrightarrow & MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 10 \\
 \Leftrightarrow & MI^2 = 10 + 9 \\
 \Leftrightarrow & MI = \sqrt{19}
 \end{aligned}$$

Par conséquent M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{19}$

3. Rechercher l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 5$, représenter soigneusement cet ensemble en vert.

Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 5 \Leftrightarrow AB \times AH = 5 \Leftrightarrow AH = \frac{5}{6}$

$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{HA}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HM} = 0
 \end{aligned}$$

Par conséquent $(AB) \perp (HM)$, et donc M est un point de la droite perpendiculaire à (AB) passant par H

