Correction du devoir Maison 8 : Suites

Exercice 1. But du devoir : Etudier les suites définies par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On note E l'ensemble des suites vérifiant cette relation de récurrence.

Partie A : Stabilité de l'ensemble E

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites de l'ensemble E. Soit λ et μ deux nombres réels.
   Démontrons que la suite $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$ appartient à l'ensemble E
   Il faut donc montrer que :
   $$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$$
   Or : $c_{n+2} = \lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2} = \lambda a_{n+1} + \lambda a_n + \mu b_{n+1} + \mu b_n = \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} + \lambda a_n + \mu b_n = c_{n+1} + c_n$

Partie B : Recherche de suite géométrique appartenant à E

2. On considère une suite géométrique (g_n) de raison q appartenant à l'ensemble E
   Comme (g_n) est une suite géométrique, on a $g_n = g_0 \times q^n$ et comme $(g_n) \in E$ on a $g_{n+2} = g_{n+1} + g_n$
   $$\begin{aligned}
   & g_{n+2} = g_{n+1} + g_n \\
   \iff\quad & g_0 \times q^{n+2} = g_0 \times q^{n+1} + g_0 \times q^n \\
   \iff\quad & g_0 \times q^{n+2} - g_0 \times q^{n+1} - g_0 \times q^n = 0 \\
   \iff\quad & g_0 \left(q^{n+2} - q^{n+1} - q^n\right) = 0 \\
   \iff\quad & g_0 q^n \left(q^2 - q - 1\right) = 0
   \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente $g_0 q^n \left(q^2 - q - 1\right) = 0$ ce qui équivaut à $g_n = g_0 q^n = 0 \iff g_n = 0$ ou $q^2 - q - 1 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 5$ et donc $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ Cette dernière équation a donc pour racine : $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
   Par conséquent (g_n) est soit la suite nulle, soit une suite de raison $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie C : Suite de Fibonacci

Définition 1 :
On appelle suite de Fibonacci la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

4. $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$ et $u_6 = 8$
5. Déterminons les valeurs de λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n = \lambda \varphi'^n + \mu \varphi^n$$
   Notons $v_n = \varphi'^n$ et $w_n = \varphi^n$, alors v_n et w_n sont deux suites de l'ensemble E d'après la partie B, de plus d'après la partie A $\lambda \varphi'^n + \mu \varphi^n$ est encore une suite de l'ensemble E, autrement dit il suffit de déterminer λ et μ de manière à ce que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$
   $$u_0 = 0 = \lambda + \mu \Longrightarrow \lambda = -\mu$$

et

$$u_1 = 1 = \lambda\varphi' + \mu\varphi \Longrightarrow 1 = -\mu\varphi' + \mu\varphi \Longrightarrow 1 = \mu(\varphi - \varphi') \Longrightarrow \mu = \frac{1}{\varphi - \varphi'} = \frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Par conséquent $u_n = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^n + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi^n$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^{n+1} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi^{n+1}}{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi'^n + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi^n} = \frac{-\varphi'^{n+1} + \varphi^{n+1}}{-\varphi'^n + \varphi^n} = \frac{\varphi^{n+1}\left(-\dfrac{\varphi'^{n+1}}{\varphi^{n+1}} + 1\right)}{\varphi^n\left(-\dfrac{\varphi'^n}{\varphi^n} + 1\right)} = \varphi\frac{1 - \dfrac{\varphi'^{n+1}}{\varphi^{n+1}}}{1 - \dfrac{\varphi'^n}{\varphi^n}} = \varphi\frac{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n}$$

7. $\dfrac{\varphi'}{\varphi} \in]-1;0[$, donc $-\dfrac{\varphi'}{\varphi} \in]0;1[$, par conséquent $\left(-\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, par conséquent $\pm\left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La question précédente permet donc de déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$$

<u>Partie D</u> : <u>Suite de Fibonacci</u>

On note (u_n) la suite de Fibonacci et S_n la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

8. $S_0 = 0$, $S_1 = 0 + 1 = 1$, $S_2 = 0 + 1 + 1 = 2$, $S_3 = 0 + 1 + 1 + 2 = 4$ et $S_4 = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7$
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n}(u_{i+2} - u_{i+1})$$
En effet par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \Longleftrightarrow u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(u_{i+2} - u_{i+1}) = u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + u_4 - u_3 + \cdots + u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+2} - u_1 = u_{n+2} - 1$$