

Correction du devoir Maison 7 : Probabilités

Remarque : Les situations présentées ci-dessous sont toutes issues de partie de « texas hold 'em no limit ». Pour pouvoir répondre aux questions de ce devoir, il faut avoir des connaissances sur ce jeu, que je n'expliquerai pas ici.

Situation 1 :



Joueur A



Joueur B

1. Je préférerais jouer avec une paire de valet. Mon logiciel de calcul des probabilités de poker confirme mon intuition et donne très exactement le joueur A vainqueur dans 68,2% des cas.

Après quelques tours de mise, les cartes communes aux deux joueurs sont les suivantes :



La situation : Les joueurs A et B ont déjà misé 1500€ lorsque la dame de coeur apparaît. Le joueur A qui parle en premier vient de miser 500€ supplémentaires. Le joueur B a alors trois choix : abandonner le coup, égaliser pour voir la dernière carte ou relancer.

Nous allons tout d'abord essayer de savoir si B ferait mieux d'égaliser ou d'abandonner, sans considérer la relance.

2. J'égaliserais, car j'ai bien envie de voir la dernière carte pour un minimum de jetons. Le joueur B n'a qu'une modeste paire de huit, et il est très probable, à ce stade du jeu, que le joueur A joue avec une bien meilleure main.
3. Il paraît assez clair que la situation du joueur A est plus enviable. Confirmation de la part de mon logiciel qui donne A vainqueur dans 75,3% des cas.
4. Le jeu du joueur B sera meilleur que celui du joueur A s'il tombe un trèfle ou un dix. Il y a encore 9 trèfles dans le paquet et quatre 10 dont celui de trèfle. Attention, la dame de trèfle ne permet pas au joueur B de gagner (le joueur A aurait alors un foul), au final 11 cartes permettent au joueur B de battre A. Ceci étant, d'autres cartes permettent d'améliorer la main du joueur B, comme les deux huit restant ou même les trois as restant. Si on ne connaissait pas le jeu du joueur A on aimerait bien les compter. Et on compterait alors un total de 17 cartes.

Il y a 52 cartes dans le paquet dont 8 sont connus. Le joueur B a une probabilité de gain valant :

$$\frac{11}{44} = 0,25$$

5. Supposons que le joueur B égalise (une cinquième carte apparaît donc) et que les deux joueurs « checkent » au tour suivant.

Du point de vue du joueur B, compléter le tableau suivant :

6. L'espérance de gain du joueur B est

$$E(\text{gain}) = 0,25 \times 2000 - 500 \times 0,75 = 500 - 375 = 125$$

Eventualité	Gagner	Perdre
Gain en €	2000	-500
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

7. Au regard de la question précédente, le joueur B est gagnant sur le long terme. Il avait donc intérêt à suivre.
8. Notons m la mise que le joueur A aurait du parier pour que l'espérance de gain du joueur B soit nulle. On obtiendrait alors le tableau suivant : Et l'espérance de gain du joueur B serait :

Eventualité	Gagner	Perdre
Gain en €	$1500 + m$	$-m$
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

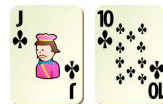
$$(1500 + m) \times \frac{1}{4} - \frac{3m}{4} = \frac{1500 + m - 3m}{4} = \frac{1500 - 2m}{4}$$

Cet espérance serait nulle si et seulement si $1500 - 2m = 0 \iff m = 750$

9. Le joueur A aurait intérêt à miser de telle manière que l'espérance de gain du joueur B soit négative. Une mise supérieure à 750€ serait ici un bon choix. De manière à provoquer l'erreur de son adversaire et ne pas le pousser à jeter ces cartes, une mise légèrement supérieure à 750€ apparaît comme idéale. Une mise $m \in]750; 1000]$, par exemple.
10. Considérons désormais que B peut également relancer après l'apparition de la dame et la mise de 500€. Compte tenu du fait que le joueur A ait déjà un brelan de valet, il est peu probable qu'il se couche quel que soit la relance du joueur B . Autrement dit, aucune relance du joueur B ne lui permettra de gagner cette main sans voir la cinquième carte. D'après les calculs précédents, plus l'argent mis en jeu au turn est élevé, moins le joueur B a intérêt à jouer. Il apparaît que relancer n'est pas un choix judicieux pour lui. Qu'il garde ces jetons afin d'espérer une cinquième carte positive et de relancer à la fin.

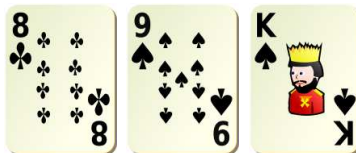
Situation 2 :

Joueur A



Joueur B

Après un premier tour de mise, les cartes communes aux deux joueurs sont les suivantes :



On note G l'événement « Le joueur B gagne » et donc $\bar{G}$ désigne l'événement « le joueur B perd ».

- 4 dames et 4 7 permettent au joueur B de battre le joueur A. De plus 2 trèfles et 2 dix successifs lui permettent aussi de l'emporter.

Remarque : Un dix suivit d'une dame ou une dame suivit d'un dix donne le joueur A vainqueur. Compte tenu de ces remarques il serait judicieux pour le joueur B de compter 8 outs. Nous le vérifierons dans la question suivante.

- Notons A , T , D , Da les événements suivants :

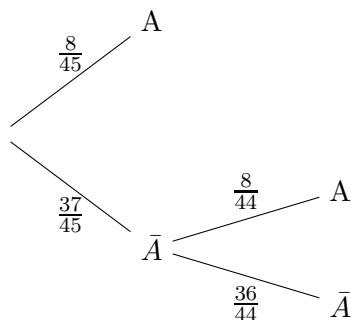
A : « il tombe une dame ou un sept »

T : « il tombe un trèfle ».

D : « il tombe un dix ».

Da : « il tombe une dame ».

Pour simplifier le problème, on pourrait considérer que le joueur B gagne si une dame ou un sept tombe lors au turn ou à la river. Cependant je vais proposer ici une solution complète. Calculons, dans un premier temps la probabilité qu'il tombe une dame ou un sept, à l'aide d'un arbre de



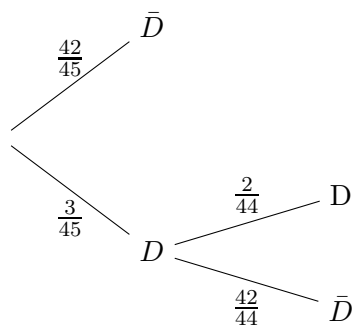
probabilité :

Par conséquent la probabilité qu'il tombe une dame ou un sept est :

$$P(A) = \frac{8}{45} + \frac{37}{45} \times \frac{8}{44} = \frac{648}{1980} \simeq 0,32$$

Ce que retiendra le joueur de poker, c'est que lorsqu'il a 8 outs, il y a une chance sur trois de gagner le coup.

Pour être plus complet, calculons la probabilité, à priori très faible que le joueur B a de toucher 2



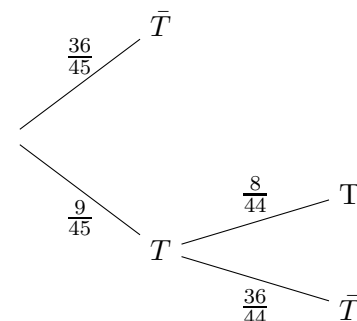
dix, à l'aide de nouveau d'un arbre de probabilité.

Par conséquent la probabilité pour le joueur B de toucher deux 10 est :

$$P(D) = \frac{3}{45} \times \frac{2}{44} = \frac{6}{1980} \simeq 0,003$$

En effet, cette situation est peu probable...

Il pourrait encore toucher 2 trèfles pour gagner, ce qui est plus envisageable que deux 10. Calculons la



probabilité de voir venir deux trèfles, à l'aide d'un nouvel arbre de probabilité :

Par conséquent la probabilité de toucher deux trèfles vaut :

$$P(T) = \frac{9}{45} \times \frac{8}{44} = \frac{72}{1980} \simeq 0,03$$

Même si cet événement est dix fois plus probables que le précédent, il reste très peu probable...

Pour être complet, calculons la probabilité que le joueur B voit venir une dame puis un dix, et un dix puis une dame, deux situations qui ne permettent pas de départager les deux joueurs. A titre d'exercice vous pourrez faire un arbre comme précédemment. Le résultat est le suivant :

$$P(\text{égalité}) = \frac{12}{1980} \times 2 = \frac{24}{1980} \simeq 0,01$$

L'égalité n'a qu'une chance sur 100 de se produire...

Enfin, calculons la probabilité qu'il tombe la dame et le 7 de trèfle (que nous avons déjà compter deux fois) :

$$P(Da \cap T) = \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} = \frac{1}{990}$$

Au final la probabilité de victoire du joueur B est la suivante :

$$P(G) = \frac{648}{1980} + \frac{72}{1980} + \frac{6}{1980} - \frac{24}{1980} - \frac{2}{1980} = \frac{700}{1980} \simeq 0,35$$

Moralité il a 35% de chance de gagner ce coup, finalement on avait peu intérêt à compter les cas un peu marginaux qui le faisait gagner (deux dix ou deux trèfles) comme on avait peu intérêt à prendre en compte le cas dramatique pour le joueur B . Tout ceci influait très peu sur le résultat. Le joueur B aurait eu raison de se contenter de compter 8 outs sans se soucier du reste, il en aurait déduit qu'il avait une chance sur trois de gagner.

3. Mais voilà qui est déjà fait dans la question précédente ! La probabilité qu'il tombe deux trèfles est :

$$P(T) = \frac{9}{45} \times \frac{8}{44} = \frac{72}{1980} \simeq 0,03$$

4. Les deux joueurs ont déjà misé 100€. Le joueur A mise encore 200€. Calculer l'espérance de gain du joueur B . A-t-il intérêt à jouer ?

Supposons que le joueur B égalise (une quatrième carte apparaît donc) et que les deux joueurs « checkent » aux tours suivants.

Du point de vue du joueur B , on a le tableau suivant : Par conséquent, l'espérance de gain du joueur

Eventualité	Gagner	Perdre
Gain en €	300	-200
Probabilité	$\frac{700}{1980}$	$\frac{1280}{1980}$

B est :

$$\frac{700}{1980} \times 300 - 200 \times \frac{1280}{1980} \simeq -23$$

Aux yeux de ce résultat, le joueur B a simplement intérêt à jeter ces cartes et attendre un coup plus propice à la victoire.

5. Refaire la question précédente, en supposant que le joueur A mise 50€. Dans ce cas le tableau devient : Et donc l'espérance de gain du joueur B est :

Eventualité	Gagner	Perdre
Gain en €	150	-50
Probabilité	$\frac{700}{1980}$	$\frac{1280}{1980}$

$$\frac{700}{1980} \times 150 - 50 \times \frac{1280}{1980} \simeq 21$$

Cette mise permet au joueur B de suivre.

Situation 3 :

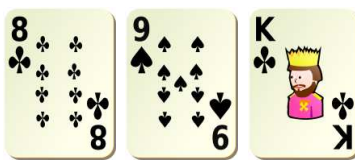


Joueur A



Joueur B

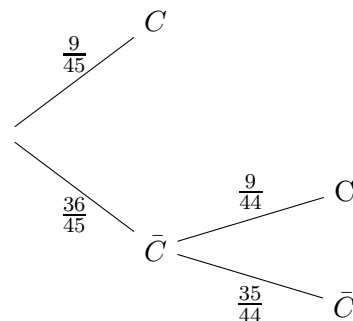
Après un premier tour de mise, les cartes communes aux deux joueurs sont les suivantes :



On note G l'événement « Le joueur B gagne » et donc $\bar{G}$ désigne l'événement « le joueur B perd ».

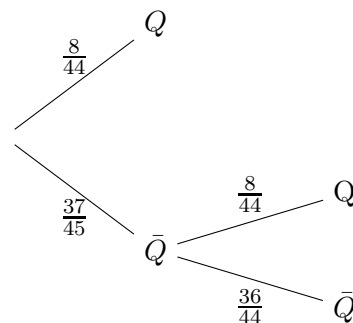
1. Si un trèfle sort, le joueur B aura une couleur, donc cela fait déjà 9 out permettant au joueur B de battre le joueur A . De plus, il aura une quinte si il obtient une dame ou un 7. Au total cela donne 15 out. **Remarque :** Compte tenu du manque d'intérêt de compter les situations où deux cartes successives permettent à l'un ou l'autre des deux joueurs de gagner, on ne s'intéressera pas à ces cas. Par exemple un neuf de trèfle puis un roi donne le joueur A vainqueur, ect...
2. Calculer la probabilité des événements C : « le joueur B obtient une couleur » et Q : « le joueur B obtient une quinte »

$$P(C) = \frac{9}{45} + \frac{36}{45} \times \frac{9}{44} = \frac{4}{11}$$



On obtient ce calcul à l'aide de l'arbre de probabilité suivant :

$$P(Q) = \frac{8}{45} + \frac{37}{45} \times \frac{8}{44} = \frac{18}{55}$$



On obtient ce calcul à l'aide de l'arbre de probabilité suivant :

3. Il reste deux cartes à tirer.

$$P(G) = P(C \cup Q) = P(C) + P(Q) - P(Q \cap C) = \frac{20}{55} + \frac{18}{55} - \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} = \frac{38}{55} - \frac{1}{990} = \frac{683}{990}$$

- 4.

$$E(\text{gain}) = 300 \times \frac{683}{990} - 200 \times \frac{207}{990} \simeq 165 \text{ €}$$

Le joueur B a alors intérêt à jouer puisque son espérance de gain est assez élevé.

- 5.

$$E(\text{gain}) = 150 \times \frac{683}{990} - 50 \times \frac{207}{990} \simeq 93 \text{ €}$$

Le joueur B aurait aussi intérêt à jouer, mais pourrait même envisager une relance pour augmenter son espérance de gain.