Correction du devoir Maison 7 : Probabilités

Exercice 1. Le but du problème est de connaître les probabilités de trouver deux personnes ayant une date d'anniversaire identique parmi un groupe de n personnes.
On note l'événement

A_i : « Les i personnes ont des dates d'anniversaire différentes »

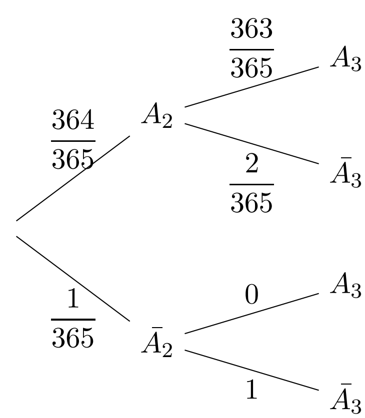
Partie A : Le principe des tiroirs

0. Supposons que $n > 365$ déterminer la probabilité de l'événement A_n
Pour que les n personnes aient des dates d'anniversaire différentes, il faudrait qu'elles soient nées chacune un jour différent. Or il y a 365 jours dans l'année, donc il faut que le nombre de personnes soit inférieur ou égal à 365 pour que les dates soient différentes. Par conséquent :

$$P(A_n) = 0$$

Partie B : Où l'on calcule $P(A_n)$, pour n un entier compris entre 1 et 365

1. $P(A_1) = 1$, car il est impossible que deux personnes aient leur date d'anniversaire différente, puisqu'il n'y a qu'une personne. On pouvait aussi comprendre différemment et conclure que $P(A_1) = 0$, en justifiant correctement, comme je l'ai lu par exemple sur l'une de vos copies :
« Il est impossible qu'une seule personne ait sa date d'anniversaire différente d'elle-même. »
2. La loi de probabilité est équirépartie. S'il y a deux personnes, la deuxième personne n'a plus que 364 possibilités de dates. Il ne reste que 364 jours libres sur 365. Donc $P(A_2) = \dfrac{364}{365}$
3. Dans cette question on suppose que $n = 3$.
   (a) Compléter l'arbre ci-dessus :



   (b) Les branches issues du noeud $\bar{A}_2$, conduisant à l'événement A_3 ont une probabilité nulle et n'ont donc aucune utilité pour répondre au problème posé.
   (c) $P(A_3) = \dfrac{364 \times 363}{365^2}$
4. En refaisant un arbre de probabilité (que vous pouvez refaire à titre d'exercice) on trouve fort logiquement

$$P(A_4) = \frac{364 \times 363 \times 362}{365^3}$$

5. On conjecture $P(A_5) = \dfrac{364 \times 363 \times 362 \times 361}{365^4}$; $P(A_6) = \dfrac{364 \times 363 \times 362 \times 361 \times 360}{365^5}$ et $P(A_{10}) = \dfrac{364 \times 363 \times 362 \times 361 \times 360 \times 359 \times 358 \times 357 \times 356}{365^9}$

6. On a $P(A_n) = \dfrac{364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^{n-1}}$ où $n \in [\![1;365]\!]$

Partie C : Conclusion

7. En appliquant la formule conjecturée dans la question précédente, compléter le tableau au dos du sujet.
8. On constate que $P(A_{23}) < \dfrac{1}{2}$, tandis que $P(A_{22}) > \dfrac{1}{2}$, autrement dit si on réunit 23 personnes de manière aléatoire on a plus d'une chance sur deux d'en avoir deux qui ont la même date d'anniversaire ($P(\bar{A_{23}}) > \dfrac{1}{2}$), tandis que ce n'est pas encore vrai si on ne réunit que 22 personnes.
9. Dans une classe de 30 élèves quelle est la probabilité d'avoir deux élèves ayant la même date d'anniversaire ?

$$P(A_{30}) \simeq 0,294 \Longrightarrow P(\bar{A_{30}}) \simeq 0,706$$

Par conséquent, il y a environ 70% de chance d'avoir deux élèves nés le même jour dans une classe de 30 élèves. Et encore plus dans une classe de 35 !

$n = 1$	$P(A_1) = 1$
$n = 2$	$P(A_2) \simeq 0,997$
$n = 3$	$P(A_3) \simeq 0,994$
$n = 4$	$P(A_4) \simeq 0,984$
$n = 5$	$P(A_5) \simeq 0,973$
$n = 6$	$P(A_6) \simeq 0,96$
$n = 7$	$P(A_7) \simeq 0,944$
$n = 8$	$P(A_8) \simeq 0,928$
$n = 9$	$P(A_9) \simeq 0,905$
$n = 10$	$P(A_{10}) \simeq 0,883$
$n = 11$	$P(A_{11}) \simeq 0,86$
$n = 12$	$P(A_{12}) \simeq 0,832$
$n = 13$	$P(A_{13}) \simeq 0,805$
$n = 14$	$P(A_{14}) \simeq 0,777$
$n = 15$	$P(A_{15}) \simeq 0,747$
$n = 16$	$P(A_{16}) \simeq 0,716$
$n = 17$	$P(A_{17}) \simeq 0,685$
$n = 18$	$P(A_{18}) \simeq 0,653$
$n = 19$	$P(A_{19}) \simeq 0,620$
$n = 20$	$P(A_{20}) \simeq 0,588$
$n = 21$	$P(A_{21}) \simeq 0,556$
$n = 22$	$P(A_{22}) \simeq 0,524$
$n = 23$	$P(A_{23}) \simeq 0,493$
$n = 24$	$P(A_{24}) \simeq 0,461$
$n = 25$	$P(A_{25}) \simeq 0,43$
$n = 26$	$P(A_{26}) \simeq 0,402$
$n = 27$	$P(A_{27}) \simeq 0,373$
$n = 28$	$P(A_{28}) \simeq 0,345$
$n = 29$	$P(A_{29}) \simeq 0,319$
$n = 30$	$P(A_{30}) \simeq 0,294$