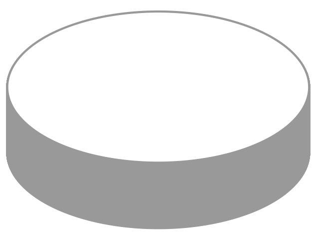
Correction du devoir Maison 6 : Dérivations

Exercice 1. Le but du problème est de déterminer

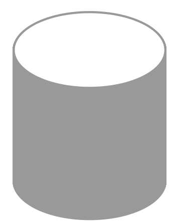
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin x$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$ et donc $f'(0) = \cos 0 = 1$
2. On sait que
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$
Or, d'après la question 1), $f'(0) = 1$, par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Exercice 2. Un industriel désire commercialiser des boîtes (cylindriques) de flageolets d'une contenance V égale à 400 cm^3. Il se demande quel est le format de la boîte qui nécessitera le moins de matière première, ceci afin d'avoir un coût de production le plus faible possible.



Plutôt larges et basses
ou
plutôt fines et hautes ?



En pratique, les boîtes de conserve sont fabriquées à partir de plaques de fer dans lesquelles sont découpés des « patrons »qui sont ensuite recourbés puis soudés **Partie A : Calcul de la surface de fer nécessaire pour fabriquer la boîte**

1. L'aire du fond de la boîte vaut :

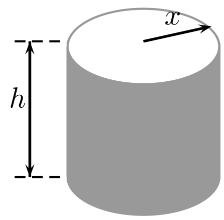
$$\pi x^2$$

De même l'aire du couvercle vaut :

$$\pi x^2$$

La partie latérale étant un rectangle dont la largeur vaut le périmètre du couvercle i.e $2\pi x$ et la longueur h, son aire vaut :

$$2\pi x \times h$$



2. Par conséquent l'aire totale de la boîte vaut :

$$A(x) = \pi x^2 + \pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x h + 2\pi x^2$$

3. Le volume d'un cylindre est le produit de la hauteur par l'aire du couvercle donc :

$$V = h \times \pi x^2 = \pi x^2 h$$

4. D'après la question précédente on a :

$$V = h \times \pi x^2 = \pi x^2 h \Longleftrightarrow 400 = \pi x^2 h \Longleftrightarrow h = \frac{400}{\pi x^2}$$

Par conséquent :

$$A(x) = 2\pi x h + 2\pi x^2 = \frac{2\pi x \times 400}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{800}{x} + 2\pi x^2$$

<u>Partie B</u> : Etude de la fonction A

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{800}{x} = +\infty$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2\pi x^2 = 0$, par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = +\infty$$

De plus on sait que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{800}{x} = 0$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2\pi x^2 = +\infty$, par conséquent :

$$\lim_{x\to +\infty} A(x) = +\infty$$

2. $A'(x) = -\dfrac{800}{x^2} + 4\pi x$ pour $x \neq 0$. Par conséquent pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& A'(x) \geq 0 \\
\iff\ & -\frac{800}{x^2} + 4\pi x \geq 0 \\
\iff\ & -\frac{800}{x^2} \geq -4\pi x \\
\iff\ & \frac{800}{x^2} \leq 4\pi x \text{ car on a multiplié par } -1 \\
\iff\ & 800 \leq 4\pi x^3 \text{ car } x^2 > 0 \\
\iff\ & \frac{200}{\pi} \leq x^3 \\
\iff\ & x^3 \geq \frac{200}{\pi} \\
\iff\ & x \geq \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \text{ car la fonction } x \longmapsto \sqrt[3]{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3.

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$A\left(\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	

Comme la fonction A est strictement décroissante sur $]-\infty; \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}; +\infty[$, la fonction A admet un minimum atteint en $x_m = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$.

4.

5. D'après la question 3. de la partie A, le volume de la boîte est :

$$V = h \times \pi x^2 = \pi x^2 h \iff h = \frac{400}{\pi x^2}$$

De plus on vient de voir que la surface de la boîte était minimale pour $x = x_m$, donc la hauteur optimale est :

$$h_0 = \frac{400}{\pi {x_m}^2}$$

6. On sait que

$$x_m = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \iff x_m^3 = \frac{200}{\pi}$$

mais on sait aussi que

$$h_0 = \frac{400}{\pi {x_m}^2} = \frac{400}{\pi} \times \frac{1}{{x_m}^2}$$

Elevons cette dernière égalité au cube !

$$h_0^3 = \frac{400^3}{\pi^3} \times \frac{1}{x_m^3 \times x_m^3}$$

Et donc,

$$h_0^3 = \frac{400^3}{\pi^3} \times \frac{1}{\dfrac{200}{\pi} \times \dfrac{200}{\pi}}$$

Par conséquent :

$$h_0^3 = \frac{400^3}{\pi^3} \times \frac{1}{\dfrac{200^2}{\pi^2}} = \frac{400^3}{\pi^3} \times \frac{\pi^2}{200^2}$$

Au final :

$$h_0^3 = \frac{400^3}{200^2}\frac{\pi^2}{\pi^3} = 400 \times \left(\frac{400}{200}\right)^2 \frac{1}{\pi} = 2 \times 200 \times 2^2 \frac{1}{\pi} = 2^3 \times \frac{200}{\pi}$$

On conclut enfin que

$$h_0 = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} = 2x_m$$

<u>Conclusion</u> : la boîte nécessitant le moins de matière première est celle qui a une hauteur égale au double du rayon. (C'est-à-dire hauteur = diamètre)