CORRECTION DU DEVOIR MAISON 5 : LES LIMITES

Exercice 1.

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Poser $v(x) = -x + 1$)

Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a $f(x) \leq -x + 1$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty$. Par conséquent, et d'après le théorème de comparaison on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 + x^2 \geq 1$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $g(x) \geq \frac{1}{x^2}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$.

Par conséquent, et d'après le théorème précédent, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, on peut dire que $1 - \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\sin x}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, et donc d'après le théorème des gendarmes (qui à cause de son nom est un théorème que l'on n'aime pas appliquer...) on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Exercice 3. Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$?

Malheureusement il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$, on ne sait donc pas conclure sans transformer l'écriture de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. La présence de $\sqrt{\dots}$ nous suggère de multiplier par, ce que l'on appelle la quantité conjuguée (i.e $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$). En général le simple fait de faire ça résout tous les problèmes, voyons voir si la quantité conjuguée opère une nouvelle fois par magie :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

Le numérateur ne pose pas de soucis, et le dénominateur non plus, en effet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$$

Or, nous savons que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$, et donc nous concluons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = +\infty$$

i.e : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^3 + 5x - 1)$ De nouveau une forme indéterminée... Allons donc, pas de soucis, factorisons :

$$x^4 - 2x^3 + 5x - 1 = x^4 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$