Correction du devoir Maison 4 : Trigonométrie

Exercice 1. Calcul de $\cos\frac{7\pi}{12}$ **et de** $\sin\frac{7\pi}{12}$

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, A est le point de coordonnées $(1;\sqrt{3})$

1. Notons $A(\rho;\theta$ dans $(O;\vec{i})$, on a alors :

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2$$

et θ est tel que :

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La mesure principale de θ est alors : $\frac{\pi}{3}$. Ainsi $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$

2. B est l'image du point A par la rotation[1] de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

(a) Comme B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ on a $OA=OB$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$. Par conséquent si $(\rho;\theta)$ désigne les coordonnées de B on a $\rho=2$ et $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OB})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$ Les coordonnées polaires de B dans $(O;\vec{i})$ sont donc $\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$

(b) Notons $(x_b;y_b)$ les coordonnées cartésiennes de B dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a alors :

$$x_b=\rho\cos\theta=2\cos\frac{5\pi}{6}=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}\qquad \text{et}\qquad y_b=\rho\sin\theta=2\sin\frac{5\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$$

Les coordonnées cartésiennes de B dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont donc $B\left(-\sqrt{3};1\right)$

3. Notons $(x_I;y_I)$ les coordonnées cartésiennes du milieu I du segment $[AB]$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a donc :

$$x_I=\frac{x_a+x_b}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\qquad \text{et}\qquad y_I=\frac{y_a+y_b}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Les coordonnées cartésiennes de I dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont donc $I\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

4. Calculer les coordonnées polaires de I dans $(O;\vec{i})$ revient à calculer OI et $(\vec{i},\overrightarrow{OI})$ On a :

$$OI=\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+3+2\sqrt{3}+1}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Le triangle OAB est rectangle isocèle en O puisque B est l'image de A par la rotation de centre O et de rayon $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent :

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\frac{\pi}{4}\qquad \text{et donc}\qquad (\vec{i},\overrightarrow{OI})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$$

Les coordonnées polaires de I sont donc $\left(\sqrt{2};\frac{7\pi}{12}\right)$

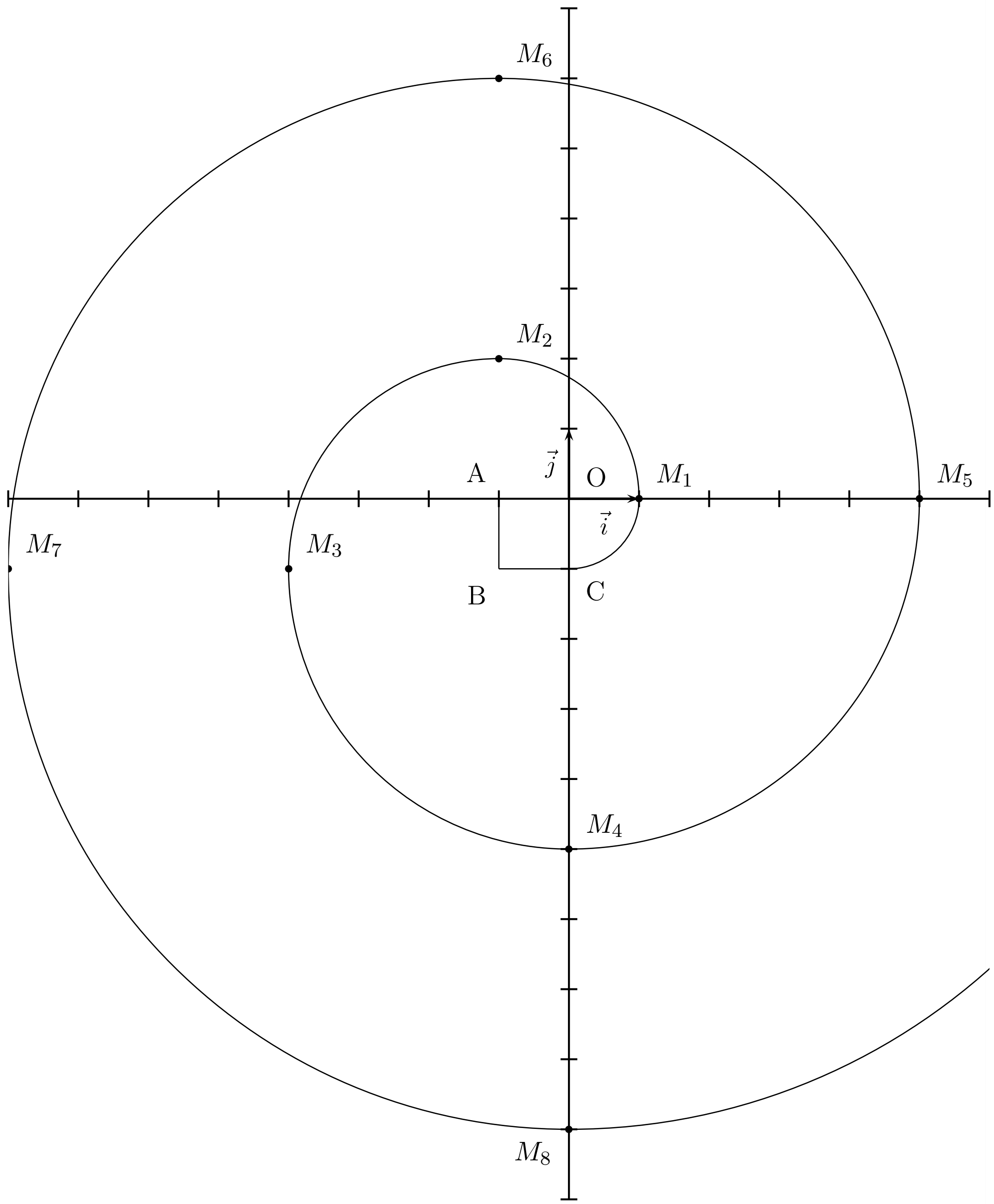
1. Dans tous le devoir on retiendra que si B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle θ alors $OA=OB$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\theta$

5. Connaissant les coordonnées polaires et cartésiennes de I on obtient :
$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{x}{\rho}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\qquad\text{et}\qquad\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

<u>Exercice</u> 2. L'objectif du problème est de construire puis d'étudier une spirale obtenue à partir d'un carré.

Partie A : Construction

Dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ le carré $OABC$ est tel que : $A(-1;0)$, $B(-1;-1)$, $C(0;-1)$. Les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O, A, B et C sont notées r_O, r_A, r_B et r_C.



1. Placer le point $M_0=C$, puis M_1, M_2, M_3 et M_4 tels que :
$$r_O(M_0)=M_1\qquad r_A(M_1)=M_2\qquad r_B(M_2)=M_3\qquad r_C(M_3)=M_4$$

2. Continuer le processus pour M_5, M_6, M_7 et M_8, ... avec :

$$r_O(M_4) = M_5 \qquad r_A(M_5) = M_6 \qquad r_B(M_6) = M_7 \qquad r_C(M_7) = M_8$$

Partie B : Des alignements

1. $$r_O(M_0) = M_1 \qquad r_A(M_1) = M_2 \qquad r_B(M_2) = M_3 \qquad r_C(M_3) = M_4$$

   on a :

   $$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) = (\overrightarrow{BM_2}, \overrightarrow{BM_3}) = (\overrightarrow{CM_3}, \overrightarrow{CM_4})$$

   On a : $M_1 \in [O, \vec{i})$, puis $M_2 \in [A, \vec{j})$ et $M_3 \in [B, -\vec{i})$ et enfin $M_4 \in [C, -\vec{j})$ ce qui prouve que $\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{OM_4}$ sont des vecteurs colinéaires et de même sens. Un raisonnement parfaitement identique montre que , $\overrightarrow{OM_8}$, $\overrightarrow{OM_{12}}$, ... sont des vecteurs colinéaires et de même sens.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_5}$, $\overrightarrow{OM_9}$, $\overrightarrow{OM_{13}}$, ... sont des vecteurs colinéaires et de même sens, puis les vecteurs $\overrightarrow{AM_2}$, $\overrightarrow{AM_6}$, $\overrightarrow{AM_{10}}$, $\overrightarrow{AM_{14}}$, ... sont des vecteurs colinéaires et de même sens, et enfin $\overrightarrow{BM_3}$, $\overrightarrow{BM_7}$, $\overrightarrow{BM_{11}}$, $\overrightarrow{BM_{15}}$, ... sont des vecteurs colinéaires et de même sens.
3. Comme $20 = 4 \times 5$ alors $M_{20} \in [0, -\vec{j})$ et comme $2009 = 4 \times 502 + 1$ alors $M_{2009} \in [O, \vec{i})$

Partie C : Calculs de longueurs de segments

1. Comme $r_O(M_0) = M_1$ on a : $OM_0 = OM_1 = 1$ puisque le cube a pour côté 1. Par conséquent $AM_1 = AO + OM_1 = 2$ et donc comme $r_A(M_1) = M_2$ on a $AM_1 = AM_2 = 2$. Puis comme $BM_2 = BA + AM_2 = 1 + 2 = 3$ et comme $r_B(M_2) = M_3$ on a $BM_2 = BM_3 = 3$. On poursuit avec $CM_3 = CB + BM_3 = 1 + 3 = 4$ et comme $r_C(M_3) = M_4$ on a $CM_3 = CM_4 = 4$ i.e $M_0M_4 = 4$
2. Comme $r_O(M_0) = M_1$ et comme $r_O(M_4) = M_5$, la rotation conservant les distances, on a : $M_0M_4 = M_1M_5$. De la même manière comme la rotation conserve les distances on obtient : $M_1M_5 = M_2M_6 = M_3M_7 = \ldots$ Par conséquent pour tout entier k, on a dans un premier temps $r_X(M_{k-1}) = M_k$ et $r_X(M_{k+3}) = M_{k+4}$ où r_X désigne l'une des quatres rotations données dans l'énonce, puis dans un second temps parce que la rotation conserve les distances, $M_kM_{k+4} = M_{k-1}M_{k+3} = \cdots = M_3M_7 = 4$.

Partie D : Calculs de longueurs d'arcs

Les arcs successifs M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_{n-1}M_n$, ... forment la spirale.
On note L_n la longueur du trajet de M_0 à M_n

1. (a) Montrer que $L_1 = \frac{\pi}{2}$ car c'est le quart du cercle de centre O et de rayon 1, $L_2 = 3\frac{\pi}{2}$ car il faut ajouter à L_1 la moitié du cercle de centre A et de rayon 2 i.e $L_2 = L_1 + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi$. Comme chaque nouvel arc de cercle voit son rayon augmenté de 1 par rapport au précédent il faut ajouter à L_{n-1} $n\frac{\pi}{2}$ d'où :

   $$L_n = \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} + 3\frac{\pi}{2} + 4\frac{\pi}{2} + \cdots + n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1 + 2 + \cdots + n)$$

   (b) On a $2S = 1 + 2 + \cdots + n + 1 + 2 + \cdots + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$ donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ puis $L_n = \dfrac{\pi}{2}(1 + 2 + \cdots + n) = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{\pi n(n+1)}{4}$
2. On cherche M_n sur la spirale tel que la longueur $L_n = 9 \times 2\pi = 18\pi$, donc tel que :

   $$\frac{\pi n(n+1)}{4} = 18\pi \iff \pi n(n+1) = 72\pi \iff n(n+1) = 72 \iff n^2 + n - 72 = 0$$

On cherche donc les entiers solutions de l'équation de degré 2 : $n^2 + n - 72 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 72 = 289$$

, on trouve donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{289}}{2} = \dfrac{-1+17}{2} = 8$ et $x_2 = \dfrac{-1-17}{2} = -9$ La seule solution possible est $n = 8$, donc M_8 est un tel point sur cette spirale