Correction du devoir Maison 3 : Second degré et fonctions polynômes

Exercice 1. Résoudre le système $(\mathcal{S})$, i.e trouver tous les couples $(x;y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : [1]

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

On raisonne par substitution, la première équation donne $x = 5-y$, puis on remplace dans la deuxième équation pour obtenir :

$$y(5-y)=6 \iff 5y-y^2-6=0 \iff -y^2+5y-6=0$$

$\Delta = b^2-4ac = 25-24 = 1$, on obtient donc deux racines :

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Comme $x = 5-y$ on a :

$$x_1 = 5-y_1 = 5-3 = 2 \qquad x_2 = 5-y_2 = 5-2 = 3$$

Le systéme admet donc deux couples solutions qui sont $(2;3)$ et $(3;2)$

Exercice 2. $ABCD$ est un rectangle de largeur x et de longueur $1-x$ (avec $0 < x \leq \frac{1}{2}$)

1. Notons $\mathscr{A}$ l'aire du rectangle $ABCD$. On a :

$$\mathscr{A} = x(1-x) = x-x^2 \qquad \text{(longueur} \times \text{largeur)}$$

On cherche pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle est-elle égale à $\frac{2}{9}$, i.e on cherche à résoudre :

$$\mathscr{A} = \frac{2}{9} \iff x-x^2 = \frac{2}{9} \iff -x^2+x-\frac{2}{9} = 0 \iff -9x^2+9x-2 = 0$$

De plus $\Delta = b^2-4ac = 81-4\times(-9)\times(-2) = 81-72 = 9$ Par conséquent

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-3}{-18} = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+3}{-18} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

D'après l'énoncé, $0 < x \leq \frac{1}{2}$, autrement dit une seule des deux valeurs trouvées précédemment convient et $\mathscr{A}$ vaut $\frac{2}{9}$ pour $x = \frac{1}{3}$

2. On a :

$$\mathscr{A} = x-x^2 \qquad \text{et } 0 < x \leq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Par conséquent

$$0 < x^2 \leq \frac{1}{4} \iff 0 > -x^2 \geq -\frac{1}{4} \iff -\frac{1}{4} \leq -x^2 < 0 \qquad (2)$$

En sommant membre à membre (1) et (2), on obtient :

$$-\frac{1}{4} < x-x^2 < \frac{1}{2}$$

1. On ramènera l'étude de ce problème à la recherche des racines d'un trinôme du second degré

Puisque $\mathscr{A} > 0$ on a en fait : $0 < \mathscr{A} < \dfrac{1}{2}$
À ce moment précis le travail sur les inégalités se complexifient, on a majoré $\mathscr{A}$ mais on est pas du tout sûr d'avoir trouvé le meilleur majorant possible et on est sûr de ne pas avoir trouvé le maximum (notament à cause de l'inégalité stricte...)
Autre stratégie : Considérons $\mathscr{A}$ la fonction qui a x associe $\mathscr{A}(x) = x - x^2$. Sa représentation graphique est une parabole, tourné vers le haut ($a < 0$) et son sommet S, ici un maximum a pour coordonnées :

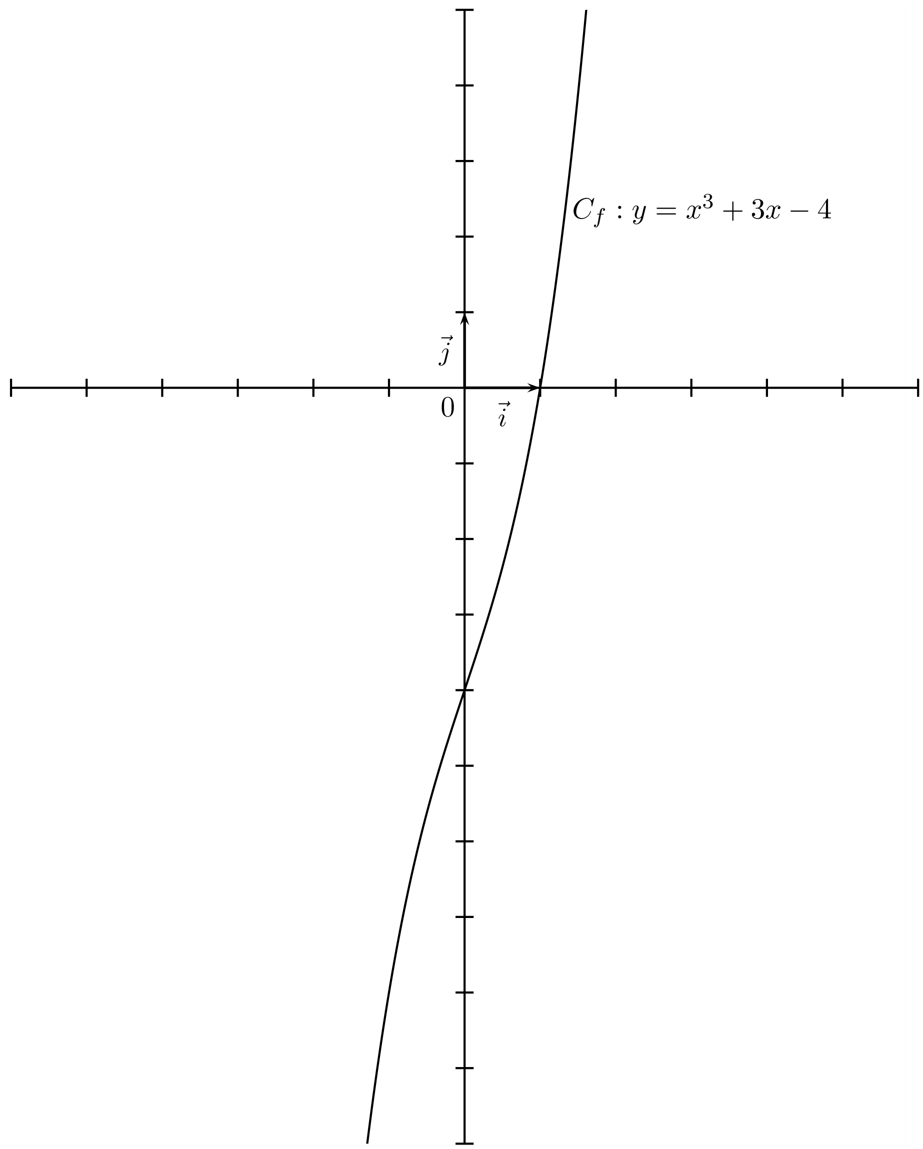
$$S\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad \text{i.e} \qquad S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$

L'aire maximale du rectangle ABCD est donc atteinte lorsque $x = \dfrac{1}{2}$ et vaut $= \dfrac{1}{4}$ On remarque que la première méthode ne permet pas d'aboutir à au maximum de la fonction

Exercice 3.
Partie A : *Résolution d'une équation de degré* 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x - 4$$

1. $f = u + v$ où $u(x) = x^3$ et $v(x) = 3x - 4$. La fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction affine v aussi. Par conséquent f est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. 

3. On lit graphiquement $A(1;0)$. De plus :

$$f(1) = 1^3 + 3 - 4 = 0$$

4. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$x > 1 \iff f(x) > f(1) \iff f(x) > 0$$

On en conclut que l'équation $f(x) = 0$ n'adment aucune solution supérieure à 1.
De même, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$x < 1(x) < 1 \iff f(x) < 0$$

On en conclut que l'équation $f(x) = 0$ n'adment aucune solution inférieure à 1. Comme 1 est solution de l'équation, on est sûr que $f(x) = 0 \iff x = 1$

Partie B : *Où l'on établit une égalité*

Définition : La racine cubique d'un nombre réel a est l'unique nombre réel b, noté $\sqrt[3]{a}$, qui élevé au cube donne a. En d'autres termes : $a = b^3 \iff b = \sqrt[3]{a}$ [2]

Le but de cette partie est d'établir l'égalité suivante :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$$

1. Pour tous réels a et b, on a :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

   De plus

$$(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right] = (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab) = (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

2. On pose $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.
   On a

$$\alpha^3 + \beta^3 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}^{\,3} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}^{\,3} = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5} = 4$$

$$\alpha \times \beta = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \times \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

   [3]

3. Comme

$$(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right] = a^3 - b^3$$

   On choisit $a = \alpha$ et $b = \beta$, et on obtient :

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\right] = \alpha^3+\beta^3 \\ \iff & (\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2 - 3\times(-1)\right] = 4 \\ \iff & (\alpha+\beta)^3 - 3(\alpha+\beta) - 4 = 0 \end{aligned}$$

   donc $(\alpha+\beta)$ est solution de l'équation $x^3+3x-4=0$

4. $x^3+3x-4=0$ admet, comme unique solution 1, d'aprés la **Partie A**. On conclut, comme $(\alpha+\beta)$ est solution de l'équation $x^3+3x-4=0$, que $(\alpha+\beta)=1$ i.e :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$$

2. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2\times2\times2 = 8$, de même $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)\times(-3)\times(-3) = -27$, et surtout $(\sqrt[3]{a})^3 = a$
3. On admet que $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$