

DM 8 : Suites

Exercice 1.

(2 points)

Calculer les sommes suivantes :

$$I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \quad \text{somme des } n \text{ premiers entiers naturels impairs}$$

$$P_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n \quad \text{somme des } n \text{ premiers entiers naturels pairs}$$

Exercice 2.

(4 points)

1. ABC est un triangle rectangle. La longueur de son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces longueurs.
2. ABC est un triangle rectangle. La longueur de son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer ces longueurs.

Exercice 3.

(5 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
2. Soit (t_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.
3. Démontrer que :

$$u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

5. Calculer S_{10}

Exercice 4.

(9 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Si oui, préciser sa raison.
3. (a) On suppose qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_k \leq 3$.
Démontrer que dans ce cas, on a aussi $0 \leq u_{k+1} \leq 3$.
*On dit que la propriété $\mathcal{P}_k : 0 \leq u_k \leq 3$ est **héréditaire**.*
(b) En constatant que $u_0 = 3$, déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n \leq 3$.
*On appelle ce type de démarche le raisonnement par **récurrence**.*
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

- (a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
- (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
- (c) Exprimer v_n en fonction de n .
- (d) Exprimer u_n en fonction de v_n , puis en fonction de n .
- (e) Que vaut u_{10} ?