

DM 6 : Dérivation

L'objet de ce DM est d'étudier une fonction polynôme et sa dérivée, afin de comparer leurs courbes. Ce devoir fait référence au chapitre sur les polynômes et sur les limites. Il est conseillé de s'y référer.

Soient f et F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 12x + 14$$

Partie A : Etude du signe de la fonction f (5 points)

1. Montrer que 1 est une racine évidente de f .
2. Trouver alors les coefficients a , b et c tels que $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire toutes les racines de f .
4. Factoriser f au maximum.
5. Dresser le tableau de signes de f .

Partie B : Etude des variations de la fonction f (5 points)

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Etudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis établir le tableau de variations de f .
4. Compléter ce tableau avec les racines de f trouvées dans la partie A.

Partie C : Etude des variations d'une fonction F (6 points)

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.
2. Dériver la fonction F sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire de la partie A et de la question précédente le tableau de variations de la fonction F .
4. Déduire de ce tableau le nombre de racines réelles de F .
5. Déterminer les tangentes T_{-1} et T_2 à la courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de la fonction F respectivement aux points d'abscisse -1 et 2 .

Partie D : Réflexion sur les courbes (4 points)

1. Sur papier millimétré, tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_F$ représentatives des fonctions f et F sur $[-3.5; 4.5]$.
Echelle : 2 cm en abscisse, 0.5 cm en ordonnée

Indications : On prendra soin de tenir compte des valeurs extrêmes pour placer l'origine du repère. On placera auparavant pour s'aider toutes les tangentes trouvées ainsi que les tangentes horizontales des deux courbes.

2. Les courbes tracées ont-elles les mêmes variations ?
3. Les fonctions sont-elles de mêmes signes ? ont-elles les mêmes racines ?
4. Quel lien graphique existe-t-il entre elles ?