DM 6 : Dérivation

Soient f et F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 12x + 14$$

Partie A : Etude du signe de la fonction f (5 points)

1. $f(1) = 1 - 2 - 11 + 12 = 0$.
2. On peut déjà remarque que $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ si et seulement si $ax^3 = 1$ et $-c = 12$. Donc on a $a = 1$ et $c = -1$ immédiatement.
   De plus

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2+bx-12) &= x^3 + bx^2 - 12x - x^2 - bx + 12 \\ &= x^3 + x^2(b-1) + x(-12-b) + 12\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2+bx-12) &= f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \\ &\iff b - 1 = -2 \text{ et } -12 - b = -11 \\ &\iff b = -1\end{aligned}$$

   D'où $f(x) = (x-1)(x^2 - x - 12)$.
3. On étudie le polynôme $P(x) = x^2 - x - 12$.
   On a $\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 49$. Donc $x_1 = \dfrac{1-7}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{1+7}{2} = 4$.
   Les racines de f sont donc -3, 1 et 4.
4. Par conséquent $f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)$.
5.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B : Etude des variations de la fonction f (6 points)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3x^2 - 4x - 11$.
3. On étudie le signe du trinôme $f'(x) = 3x^2 - 4x - 11$.
   On a $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times (-11) = 148 = 4 \times 37$. Donc $x_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{37}}{6} = \dfrac{2-\sqrt{37}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{37}}{3}$.
   Donc $f'(x) = 3\left(x - \dfrac{2-\sqrt{37}}{3}\right)\left(x - \dfrac{2+\sqrt{37}}{3}\right)$

Et on a

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{37}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{37}}{3}$		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - x_2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	20.75	$\searrow$	-12.60	$\nearrow$	$+\infty$

4. Compléter ce tableau avec les racines de f trouvées dans la partie A.

<u>Partie C</u> : Etude des variations d'une fonction F (7 points)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} = -\infty$.
2. $F'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{11}{2} \times 2x + 12 = x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3.

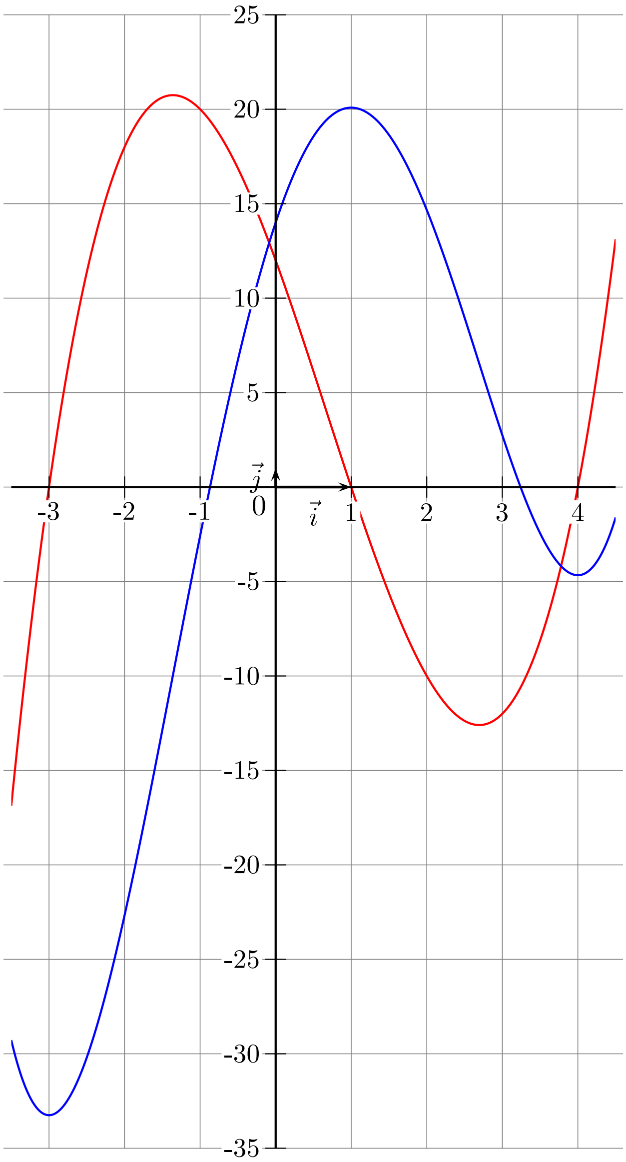
x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-33.25	$\nearrow$	20.08	$\searrow$	-4.67	$\nearrow$	$+\infty$

4. F possède 4 racines réelles.
5. On sait que $T_{-1} : y = F'(-1)(x+1) + F(-1)$. On a de plus $F'(-1) = f(-1) = 20$ et $F(-1) = -\frac{31}{12}$.

   Donc finalement $T_{-1} : y = 20(x+1) - \frac{31}{12}$

   De même on a $F'(2) = f(2) = -10$ et $F(2) = \frac{208}{3}$. Donc $T_{-1} : y = -10(x-2) + \frac{208}{3}$

<u>Partie D</u> : Réflexion sur les courbes obtenues (2 points)

1. 

2. Les courbes tracées n'ont pas les mêmes variations.
3. Elles n'ont pas le même signe, ni les mêmes racines.
4. On peut remarquer que lorsque le fonction f s'annule (et change de signe), la fonction F a une tangente horizontale et change de sens de variation.
   Lorsque la fonction f est positive, la fonction F croît et inversement.
   On constate également que plus les valeurs de f sont grandes (en valeur absolue), plus la pente de la courbe $\mathscr{C}_F$ est forte.