Corrrection DS n°1

Exercice 5.1. Entiers naturels et nombre premiers (9 points)

1. $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ et $9828 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13$
2. $pgcd(720; 9828) = pgcd(2^4 \times 3^2 \times 5; 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13) = 2^2 \times 3^2$
3. $720^{34} = \left(2^4 \times 3^2 \times 5\right)^{34} = 2^{4\times 34} \times 3^{2\times 34} \times 5^{34} = 2^{136} \times 3^{68} \times 5^{34}$
4. $$\frac{9828}{720^{34}} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13}{2^{136} \times 3^{68} \times 5^{34}} = \frac{7 \times 13}{2^{136-2} \times 3^{68-3} \times 5^{34}} = \frac{7 \times 13}{2^{134} \times 3^{65} \times 5^{34}}$$
5. $A = \dfrac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{720}{5}} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3 \in \mathbb{N}$

   $B = \dfrac{9828^{46}}{8281} = \dfrac{2^{2\times 46} \times 3^{3\times 46} \times 7^{46} \times 13^{46}}{7^2 \times 13^2} = 2^{92} \times 3^{138} \times 7^{46-2} \times 13^{46-2} = 2^{92} \times 3^{138} \times 7^{44} \times 13^{44}$
6. On a $\sqrt{A} = \sqrt{1789} \simeq 42.3$. On teste la divisiblité de A par tous les nombres premiers jusqu'à 42. Aucun ne divise A. Donc A est un nombre premier.
   On a $\sqrt{B} = \sqrt{1793} \simeq 42.3$. On teste la divisiblité de B par tous les nombres premiers jusqu'à 42. On trouve que $1793 = 11 \times 163$. Donc B n'est pas premier.

Exercice 5.2. Équations et ensembles de nombres (5 points) cf $DM1$

- $3 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $1.5 \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$: impossible
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \sqrt{6} \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (-3x-4)(2x-8) &= 0 \\ -3x+4 = 0 \text{ ou } 2x-8 &= 0 \\ x = \frac{4}{3} \text{ ou } x &= 4 \\ S &= \{4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{6}{13}x + \frac{1}{13} &= -\frac{3}{13} \\ -6x+1 &= -3 \\ x &= \frac{2}{3} \\ S &= \varnothing \end{aligned}$$

Exercice 5.3. Équations (3points)

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \\ x = 2 \text{ ou } x &= -2 \\ S &= \{-2; 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x+7}{-4x+54} &= 0 \\ \begin{cases} 3x+7 = 0 \\ -4x+54 \neq 0 \end{cases} & \\ x = -\frac{7}{3} \text{ et } x &\neq \frac{54}{4} \\ S &= \left\{-\frac{7}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4x-1)\left(-2x+\frac{1}{2}\right) + (4x+1) &= 0 \\ (4x+1)\left[-2x+\frac{1}{2}+1\right] &= 0 \\ (4x+1)\left(-2x+\frac{3}{2}\right) &= 0 \\ 4x+1 = 0 \text{ ou } -2x+\frac{3}{2} &= 0 \\ x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x &= \frac{3}{4} \\ S &= \left\{-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right\} \end{aligned}$$

Exercice 5.4. Fractions (3 points)

1. $A = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{5} = \dfrac{\frac{8}{6} + \frac{3}{6}}{5} = \dfrac{\frac{11}{6}}{5} = \dfrac{11}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{30}$ et 2. cf Exercice 3.12.