Correction DM n°3

Exercice 2.1. (3 points)

1. Eratum : On considère de plus $2 < m < p$

$$\begin{aligned} 2 < m < p &\overset{\times(-2)<0}{\iff} -4 > -2m > -2p \\ &\overset{+3}{\iff} -1 > 3-2m > 3-2p \\ &\overset{\times(-1)<0}{\iff} 1 < -3+2m < -3+2p \\ &\overset{inverse\ sur\ >0}{\Longrightarrow} \frac{1}{-3+2m} > \frac{1}{-3+2p} \\ &\overset{\times(-1)<0}{\iff} \frac{1}{3-2m} < \frac{1}{3-2p} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0 < m < p &\overset{+1}{\iff} 1 < m+1 < p+1 \\ &\overset{/5}{\iff} \frac{1}{5} < \frac{m+1}{5} < \frac{p+1}{5} \\ &\overset{racine\ sur\ >0}{\Longrightarrow} \sqrt{\frac{m+1}{5}} < \sqrt{\frac{p+1}{5}} \end{aligned}$$

Exercice 2.2.

1.

$$\begin{aligned} 2 < b \leq 3 &\overset{carre\ sur\ >0}{\iff} 4 < b^2 \leq 9 \\ &\overset{+2}{\iff} 6 < 2+b^2 \leq 11 \\ &\overset{/5}{\iff} \frac{6}{5} < \frac{2+b^2}{5} \leq \frac{11}{5} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 1 \leq a < 2 &\overset{\times(-2)<0}{\iff} -2 \geq -2a > -4 \\ &\iff -4 < -2a \leq -2 \\ &\Longrightarrow 2+(-4) < b+(-2a) \leq 3+(-2) \\ &\iff -2 < b-2a \leq 1 \end{aligned}$$

3. On a $\quad -2 < b-2a \leq 1 \overset{/5}{\iff} -\frac{2}{5} < \frac{b-2a}{5} \leq \frac{1}{5}$
Pour passer à l'inverse, on a besoin que les nombres soient tous de même signe et non nuls. Donc si $b = 2a$, le nombre $\dfrac{5}{b-2a}$ n'existe pas. Sinon, on décompose l'inégalité suivant deux cas :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} < \frac{b-2a}{5} < 0 &\overset{\times(-1)<0}{\iff} \frac{2}{5} > -\frac{b-2a}{5} > 0 \\ &\overset{inverse\ sur\ >0}{\Longrightarrow} \frac{5}{2} < -\frac{5}{b-2a} \\ &\overset{\times(-1)<0}{\iff} -\frac{5}{2} > \frac{5}{b-2a} \end{aligned}$$

$$\text{Et} \quad 0 < \frac{b-2a}{5} \leq \frac{1}{5} \overset{inverse\ sur\ >0}{\Longrightarrow} \frac{5}{b-2a} \geq \frac{1}{5}$$

Finalement $\dfrac{5}{b-2a} \in]-\infty; -\dfrac{5}{2}[\cup [\dfrac{1}{5}; +\infty[$

Exercice 2.3. On a $0 < a < 1$ donc $a > a^2 > a^3$.

Exercice 2.4. $A - B = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$
Donc si $x = 1$, alors $A - B = 0$, c'est-à-dire $A = B$.
Si $x \neq 1$, on a $(x-1)^2 > 0$ et $x > 0$, donc $A - B > 0$, c'est-à-dire $A > B$.

Exercice 2.5.

1.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$A(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 2.6.

1. $x^2 + 1 \geq 0$ C'est toujours le cas, donc $S = \mathbb{R}$
2. $(2x-5)(-x-3) \geq 0$

   $2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$ et $-x - 3 = 0 \iff x = -3$

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-5)(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $S = [-3; \frac{5}{2}]$

3. $(x-4)(-3x+9) + (x-4)(x-7) \leq 0 \iff (x-4)(-2x+2) \leq 0$

   $x - 4 = 0 \iff x = 4$ et $-2x + 2 = 0 \iff x = 1$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-4)(-2x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $S =]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[$

4. $3x(x-2)(-5+x)<0$

   $3x=0 \iff x=0 \quad , \quad x-2=0 \iff x=2 \quad \text{et} \quad -5+x=0 \iff x=5$

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-5+x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x(x-2)(-5+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   $S=]-\infty;0[\cup]2;5[$

5. $(2x-5)(-x-3)\leq 15 \iff (2x-5)(-x-3)-15\leq 0 \iff -2x^2-6x+5x+15-15\leq 0 \iff -2x^2-x\leq 0 \iff -x(2x+1)\leq 0$

   $-x=0 \iff x=0 \quad \text{et} \quad 2x+1=0 \iff x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$-x(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $S=]-\infty;-\dfrac{1}{2}[\cup]0;+\infty[$

6. $\dfrac{3x-1}{2-x}<0$

   Contrainte : $2-x\neq 0 \iff x\neq 2 \quad \text{et} \quad 3x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x-1}{2-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

   $S=]-\infty;\dfrac{1}{3}[\cup]2;+\infty[$