Chapitre 2 : Les vecteurs dans le plan

D. Zancanaro C. Aupérin

2008-2009

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 16 novembre 2008

Table des matières

Cours : Les Chariots du plan

Le mot vecteur vient du latin “vector”, dérivé du verbe “vehere”, qui signifie transporter. Un vector désigne donc un véhicule, par exemple un chariot. Son point de départ n'a pas d'importance sur sa nature.

1 Les chariots du plan

1.1 Caractérisation et normes des chariots

Caractérisation d'un vecteur : Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :
- Sa direction
- Son sens
- Sa longueur

Remarques :
- Un vecteur désigne un déplacement rectiligne, il est indépendant de son point de départ (de son origine)
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$

Définition 1. Il existe un vecteur qui n'a ni direction, ni sens, dont la longueur vaut 0. On l'appelle le *vecteur nul* et on le note $\vec{0}$.

Définition 2. La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul. On le note $||\vec{u}||$. En particulier : $\overrightarrow{AB} = AB$

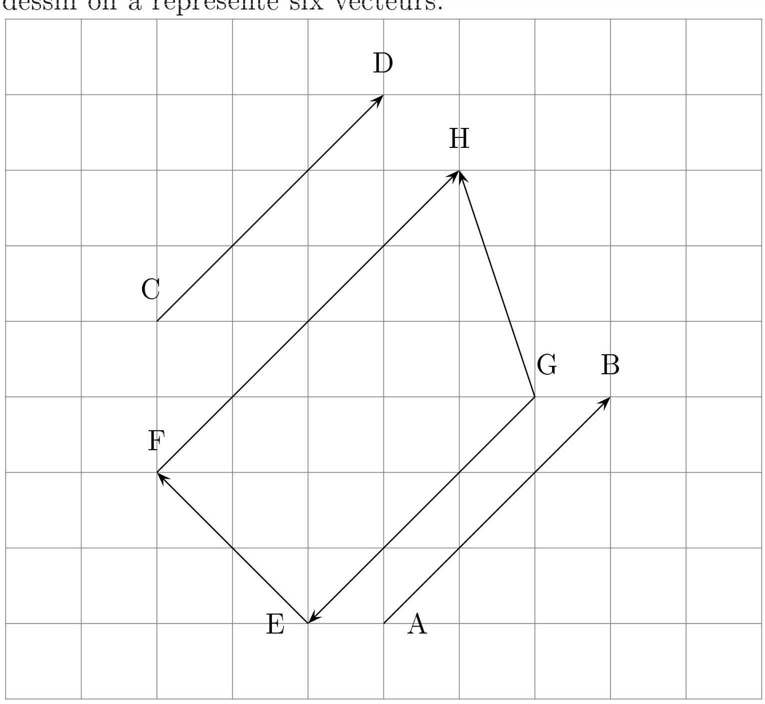
1.2 Aller ou retour ?

Propriété 1. Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallĺogramme.

<u>Définition</u> 3. Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont :
- La même direction
- La même norme
- Mais des sens opposés

On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. Ainsi l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Exemple : Sur le dessin on a représenté six vecteurs.



1. Donner les vecteurs égaux, puis les vecteurs opposés.
2. Reproduire chacun des vecteurs avec pour origine le point F

2 Transporter à plusieurs chariots

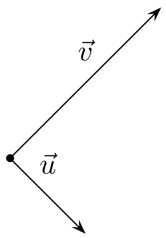
2.1 Ajouter deux vecteurs

<u>Définition</u> 4. La *somme de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ défini ainsi :
A étant un point quelconque, on place B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$; alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

Relation de Chasles : On a pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

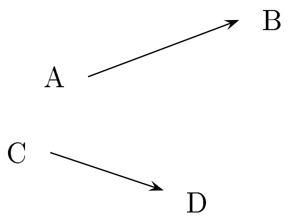
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+(-\overrightarrow{DB})=\vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$



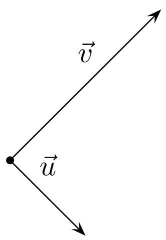
4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

2.2 Soustraire deux vecteurs

<u>Définition</u> 5. La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. On l'obtient en ajoutant à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$.

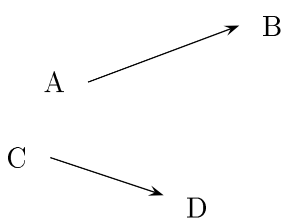
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=\vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$



4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$

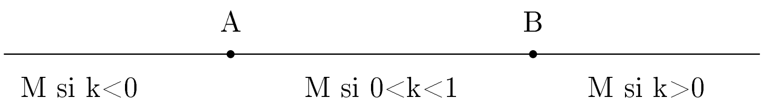
2.3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

2.3.1 Définition

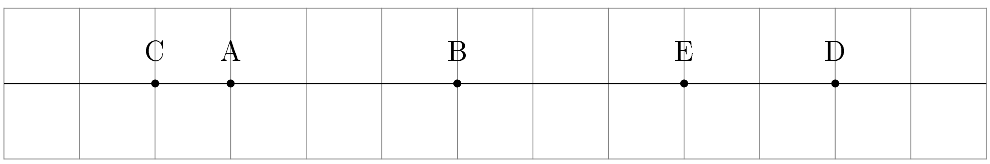
La définition se construit au fur et à mesure du déroulement du travail en classe. Il faut savoir que la notation $2\vec{u}$ n'est pas inconnue des élèves. En effet, au collège, on peut être amené à noter ainsi la somme vectorielle $\vec{u}+\vec{u}$.

Définition 6. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini ainsi :
– $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
– Si $k>0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens ; si $k<0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés
– Si $k>0$ alors $||k\vec{u}||=k||\vec{u}||$; si $k<0$ alors $||k\vec{u}||=-k||\vec{u}||$, autrement dit $||k\vec{u}||=|k|\times||\vec{u}||$
Par convention : $0\vec{u}=\vec{0}$ et $k\vec{0}=\vec{0}$.

Remarque : Soient A et B deux points distincts et k un réel donné. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$ qui se situe sur la droite (AB). Plus précisément : (si $k<0$; si $0<k<1$; si $k>1$)



Exemples :



1. Compléter les égalité vectoriels suivantes :

$$\overrightarrow{CD}=\ldots\overrightarrow{AB} \qquad ; \qquad \overrightarrow{BA}=\ldots\overrightarrow{CA}\ldots\ldots$$

2. Placer les points M, N et K vérifiant $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2.3.2 Règles de calcul

Cette activité permet de réinvestir la définition précédente, de mettre en évidence sur des cas particluers les porpriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre.

Propriété 2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous nombres réels a et b, on a :
- $a(b\vec{u}) = ab\vec{u}$
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $a.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples : $\vec{u} + 5.1\vec{u} = 6.1\vec{u}$ $\quad 3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v}$ $\quad 2(5\vec{u}) = 10\vec{u}$ $\quad -(4\vec{u}) = (-4)\vec{u} = -4\vec{u}$ $\quad \vec{v} = 4\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{v}$

Application 1.
Rappel : Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet.
Démontrer la propriété suivante :

Propriété 3. Soit ABC un triangle. Alors le centre de gravité G de ce triangle est l'unique point tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Preuve :
- Existence : On a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ où A' est le milieu du côté $[BC]$. Alors

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

  Soit D le point tel que $ABDC$ soit un parallèlogramme. Alors $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AA'}$. Donc

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 3\times\frac{-2}{3}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AA'}+2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$$

  Donc le point G vérifie bien la relation.
- Unicité : Soit M un autre point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
  Alors on a

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}+\vec{0}$$

  car G est le centre de gravité du triangle.
  De plus on sait que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, donc on a $3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Longleftrightarrow M = G$. Donc le point G est unique.

3 Se repérer sur un plan

3.1 Définition

La géoétrie analytique est limitée au minimum. Il s'agit ici de consolider les acquis de collège et de donner aux élèves les outils n{ecessaires à la compréhension de représentations graphiques.

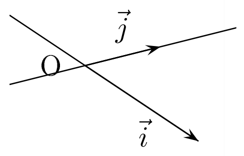
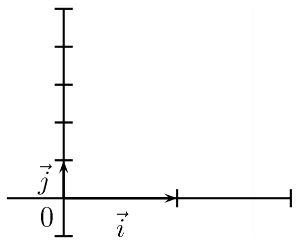
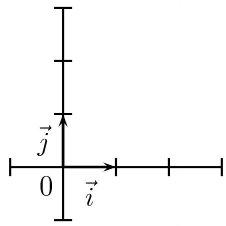
<u>Travail de l'élève</u> :

- *Introduction d'un repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$
- *Mise en place de la traduction vectorielle du fait qu'un p oint M a pour coordonnées* $(x;y)$

La quatrième question fait appel à des connaissances du collège. Les coordonnées d'un vecteur dans un repère sont au programme de la classe de troisième. Il convient cependant de rappeler la définition. Cela fait de plus le lien entre les coordonnées et l'écriture du vecteur en fonction des vecteurs de la base. La lecture graphique directement sur la figure est aussi une compétence du collège.

<u>Définition</u> 7. Soit un repère (O,I,J) du plan. Il sera désormais noté $(O;\vec{i};\vec{j})$ où $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$. Dire que M a pour coordonnées $(x;y)$ signifie que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
x et y sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On note $\overrightarrow{OM}(x;y)$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

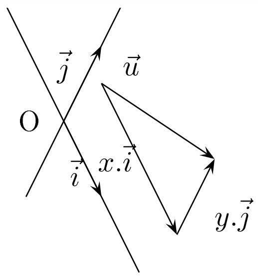
Remarque : Il s'agit d'un repérage en deux dimensions (évoquer la droite et l'espace) **Remarque :**

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormal
		
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même norme

Exemple : Soit $M(5;-3)$. Alors $\overrightarrow{OM}=5\vec{i}-3\vec{j}$ et $(5;-3)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$

<u>Définition</u> 8. On appelle base du plan tout couple $(\vec{i};\vec{j})$ de vecteurs de direction différente. Tout vecteur du plan peut alors s'exprimer de manière unique en fonction de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$. On a que pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de réels tels que : $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$.

Exemple :



Propriété 4. Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ et $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

Preuve :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= -x_A\vec{i} - y_A\vec{j}\vec{k} + x_B\vec{i} + y_B\vec{j} \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}\end{aligned}$$

Exemple : Soient $A(2;3)$ et $B(5;-4)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3;-7)$ et $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}. - 7\vec{j}$

3.2 Opérations et coordonnées

Travail de l'élève :

- Coordonnées d'un vecteur somme, du produit d'un vecteur par un réel.
- Consolidation du résultat : d{eterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$, c'est trouver les nombres réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Faire remarquer que les coordonnées de $\vec{u}$ et de $k\vec{u}$ sont proportionnelles.

Propriété 5. Deux vecteurs sont égaux ssi leur coordonnées sont égales :
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors on a : $\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Propriété 6. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un nombre réel. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ $\qquad$ $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-3;1)$, $B(5;2)$ et $C(0;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{OC}\right)$
2. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$

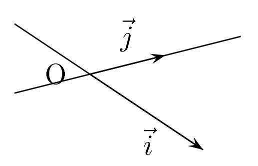
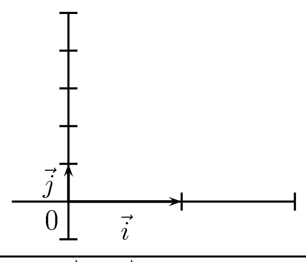
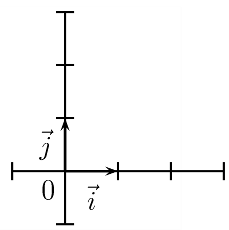
Travail de l'élève : Coordonnées du milieu d'un segment
Placer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points $A(-2;3)$ et $B(1;0)$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Justifier que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
En déduire les coordonnées de I.

Propriété 7. Soient $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $I(x_i;y_I)$.
Le point I est le milieu de $[AB]$ ssi $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

Exemple : Dans l'exemple précédent, calculer les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

Cas particulier : Le repère orthonormal

Rappel :

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormal
		
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même norme

Définition 9. Un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est orthonormal ssi :
– Les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires
– Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de mêmes normes.

Propriété 8. Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur dans le repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Corollaire 1. *Soient* $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$ *alors* $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, calculer les longueurs AB, AC et BC.

4 Colinéarité

Travail de l'élève : Réinvestir la définition précédente pour introduire la colinéarité !

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant deux vecteurs donnés, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}, \qquad \vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$$

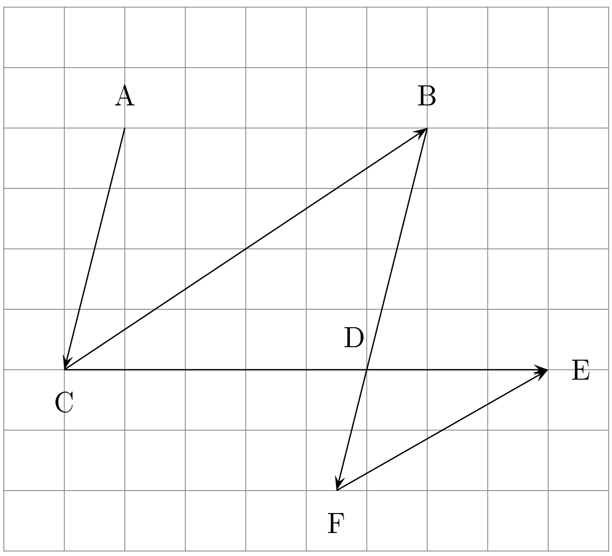
Exprimer le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}$ en fonction de $\vec{w}$ seulement.

Définition 10. Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

THÉORÈME 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Preuve : $\Leftarrow$ Trivial de par la définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
$\Rightarrow$ Admis

Exemple : Citer des vecteurs colinéaires de la figure ci-dessous et traduire par une relation vectorielle :



4.1 Conditions de colinéarité

Travail de l'élève : Cette activité a pour but de :
- Poursuivre des calculs dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- Faire le lien entre colinéarit{e et proportionnalité des coordonnées

Remarque : Rappelons que nous avons dit que deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont la même direction. Nous avons aussi vu que les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont colinéaires. Nous admettons la réciproque. La conjecture suivante peut être énoncée : Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires alors leurs coordonnées sont proportionnels et l'un est égal au produit de l'autre par un réel. La démonstration n'est pas exigible et l'on peut admettre le résultat.
On pourra cependant montrer que si les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont proportionnels alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

THÉORÈME 2. Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$,
les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que

$$x = kx' \qquad \text{et} \qquad y = ky'$$

<u>Preuve</u> : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Or le vecteur $k\vec{v}$ a pour coordonnées a pour coordonnées $(kx'; ky')$. D'où $\vec{u} = k\vec{v} \Longleftrightarrow x = kx' \quad ; \quad y = ky'$

Exemples : $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4.5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
Même question pour $\vec{s}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4.2 Alignement

<u>Travail de l'élève</u> : Soient trois points $P(2; 5)$, $Q(-1, 4)$ et $R(8; 7)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires.
2. En déduire que les points P, Q et R sont alignés.

THÉORÈME 3. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 2. Trois points distincts sont alignés ssi deux des vecteurs formés par ces trois points sont colinéaires.

__Preuve__ : Deux droites parallèles avec un point commun sont confondues.

Méthode : Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

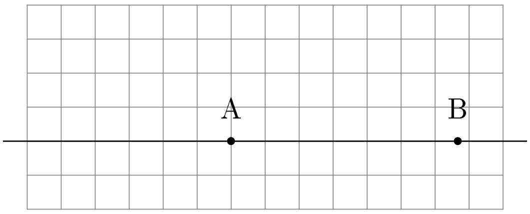
Exemple : Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

4.3 Applications

Exercices de la feuille 2

Les Annexes

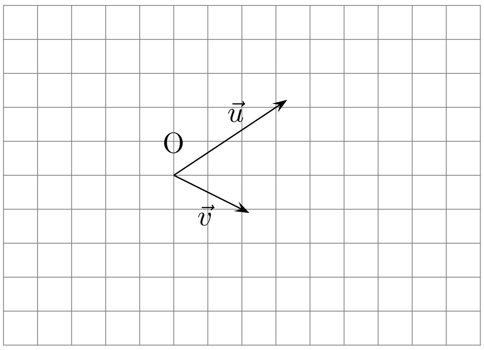
Activité 3



Soient deux points A et B distincts. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$.

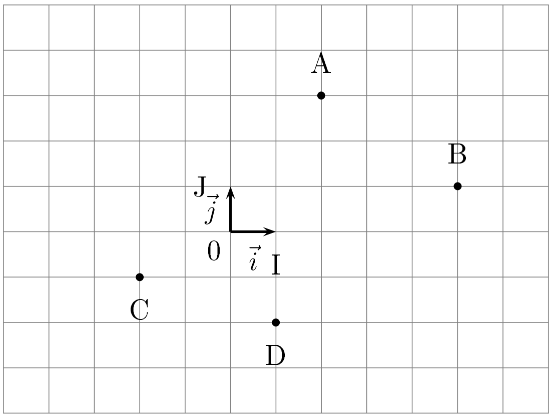
1. Placer C le symétrique de A par rapport à B et D le symétrique de C par rapport à A.
   Proposer une expression du vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.
2. Placer les points M_1 et M_2 de la droite (AB) vérifiant $AM_1 = AM_2 = \dfrac{1}{2}AB$
   Proposer une expression des vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.
3. Placer le point E tel que le triangle ABE soit rectangle isocèle en B.
   Exprimer la distance AE en fonction de la distance AB
4. Placer F et G les points distincts de la droite (AB) tels que $AF = AG = AE$ et $F \in [AB)$.
   Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\vec{i}$.
   Peut-on faire de même avec le vecteur $\overrightarrow{AE}$
5. Placer les points H et K tels que $\overrightarrow{EH} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{EK} = -\dfrac{3}{2}\vec{i}$

Activité 4



1. Construire les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{3}\vec{u} - 2\vec{v}$
2. (a) Construire les points X, Y et Z tels que $\overrightarrow{OX} = -\vec{u} - 2\vec{v}$, $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OZ} = -\dfrac{2}{3}\vec{u}$
   Que constate-t-on ?
   (b) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = 2.5(\vec{u} + \vec{v})$ et $\overrightarrow{OF} = 2.5\vec{u} + 2.5\vec{v}$
   Que constate-t-on ?
   (c) Construire les points G et H tels que $\overrightarrow{OG} = -2(3\vec{v})$ et $\overrightarrow{OH} = -6\vec{v}$
   Que constate-t-on ?

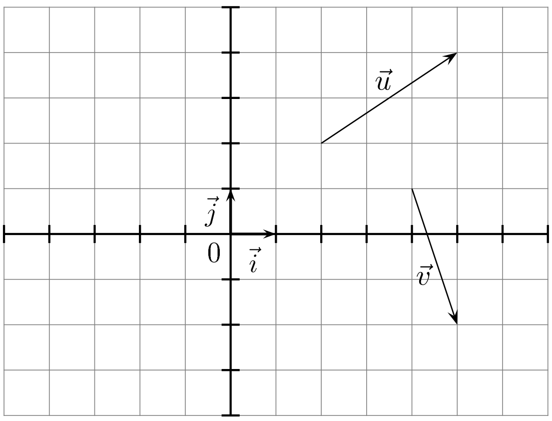
Activité 5 : Se repérer



On considère le repère (O, I, J) et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{OM} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O, I, J) ?
2. Placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = -2\vec{i} - \vec{j}$. Lire les coordonnées de P.
   En utilisant le graphique, exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DC}$. Donner leur expression à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

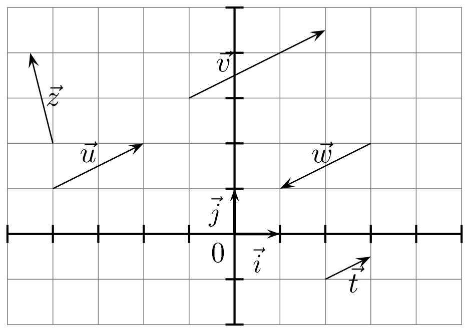
Activité 6 : Être coordonnées



On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis écrire ces vecteurs en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Exprimer le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$?
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $2\vec{v}$ et $-\dfrac{2}{3}\vec{u}$

Conditions de colinéarité

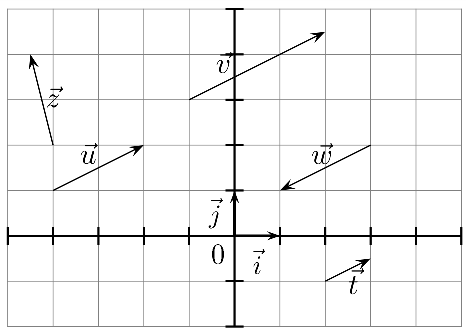


1. Parmi les vecteurs représentés ci-dessus, dire lesquels sont colinéaires
2. Lire sur le graphique ci-dessus les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$.
3. Ranger dans ce tableau les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

	$\vec{u}$	$\vec{v}$
x		
y		

   Que peut-on dire de ce tableau ?
   En est-il de même lorsqu'on remplace dans le tableau de $\vec{v}$ par celles de $\vec{w}$? de $\vec{z}$? de $\vec{t}$?
4. Établir une relation entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Écrire d'autres relations vectorielles.

Conditions de colinéarité



1. Parmi les vecteurs représentés ci-dessus, dire lesquels sont colinéaires
2. Lire sur le graphique ci-dessus les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$.
3. Ranger dans ce tableau les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

	$\vec{u}$	$\vec{v}$
x		
y		

   Que peut-on dire de ce tableau ?
   En est-il de même lorsqu'on remplace dans le tableau de $\vec{v}$ par celles de $\vec{w}$? de $\vec{z}$? de $\vec{t}$?
4. Établir une relation entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Écrire d'autres relations vectorielles.

QUAND ON N'A PAS DE TÊTE ON A DES JAMBES !

Exercice 1.1. Relation de Chasles

Simplifier au maximum les relations suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{ED}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
4. $\vec{t} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

Exercice 1.2. Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante et, dans chaque cas, illustrer par une figure :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

1. $ABCD$ est un parallèlogramme
2. $ABDC$ est un parallèlogramme
3. D est le milieu de $[AB]$
4. $ADBC$ est un parallèlogramme

Exercice 1.3. Soit $ABCD$ un parallèlogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et le point N tel que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$
4. En déduire la nature du quadrilatère $ABNI$.

Exercice 1.4. Soit ABC un triangle.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$
3. Démontrer que les droites (CE) et (FB) sont parallèles.

Exercice 1.5. Soit $ABCD$ un parallèlogramme

1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$
2. Placer les points G et H tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallèlogrammes.
3. Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$
4. En déduire que les points C, G et H sont alignés

Exercice 1.6. ABC est un triangle et O un point quelconque à l'intérieur de ABC.

1. Placer les points I ; J et K tels que $OABI$, $OBCJ$ et $OCAK$ soient des parallèlogrammes
2. Démontrer que O est le centre de gravité du triangle IJK

Exercice 1.7. G est le centre de gravité d'un triangle ABC. Démontrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Exercice 1.8. Soit ABC un triangle. Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} \qquad\qquad \vec{v} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifer

Exercice 1.9. Soient A et B deux points tels que $AB = 5$cm.
Soit M le point défini par : $-5\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.

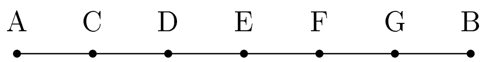
Exercice 1.10. Soit PQR un triangle de centre de gravité G. Soient les points I, J et K tels que $\overrightarrow{GI} = -3\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{GJ} = -3\overrightarrow{GQ}$ et $\overrightarrow{GK} = -3\overrightarrow{GR}$

1. Faire une figure
2. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK

Exercice 1.11. ABC est un triangle avec $AB = 8$cm.

1. Placer le point E tel que : $3\overrightarrow{EA} + 55\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ (Justifer la position de E par un calcul vectoriel)
2. Démontrer que $3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} = 8\overrightarrow{CE}$

Exercice 1.12. Le segment $[AB]$ est divisé en six parties de même longueur.



Complélter les relations suivantes par :

La lettre qui convient :

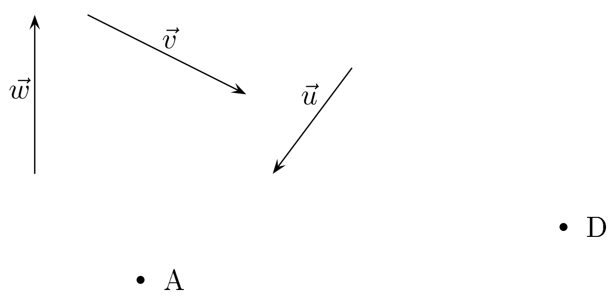
1. $\overrightarrow{E\dots} = -2\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{C\dots} + \overrightarrow{\dots G} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\dots}$

Le nombre qui convient :

(a) $\overrightarrow{CE} = \dots\overrightarrow{AB}$
(b) $\overrightarrow{AD} = \dots\overrightarrow{BF}$
(c) $\overrightarrow{DE} = \dots\overrightarrow{BF}$

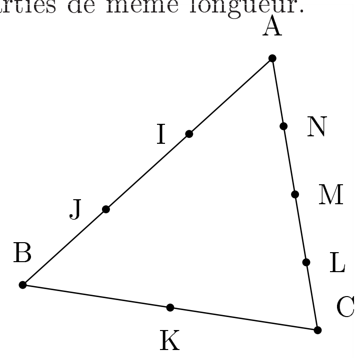
Exercice 1.13.

1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v} - \vec{u}$
2. Représenter les vecteurs $\vec{v} + \vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{u}$
3. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \vec{w} - 3\vec{u}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$



Applications de notre intelligence

Exercice 2.1. Soit ABC un triangle. Les points I et J partagent le segment $[AB]$ en trois parties égales. Le point K est le milieu du segment $[BC]$. Les points L, M et N partagent le segment $[AC]$ en quatre parties de même longueur.



1. Justifier que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{KB}$
2. Ecrire d'autres égalités vectorielles.
3. Indiquer à l'aide des points de la figure un vecteur égal à :
   - $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
   - $\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$
   - $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Exercice 2.2. Réduire le plus possible l'écriture des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants :

$$\vec{u} = \vec{i} - 2(\vec{i} + \vec{j}) - \frac{1}{3}\vec{j} \qquad \vec{v} = 3(-4\vec{i} + 5\vec{j}) - 5(2\vec{i})$$

Exercice 2.3. Exprimer à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} \qquad \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \qquad \vec{w} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$$

Exercice 2.4. Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(-2;-4)$, $B(-1;4)$ et $C(2;2)$. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 2.5. Soit ABCD un parallélogramme.

1. Construire les points E et F définis par $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles. En déduire la nature du quadrilatère $AEBF$

Exercice 2.6. ABC est un triangle quelconque. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et le point J est tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

1. Construire le point G tel que $JCGI$ soit un parallélogramme.
2. Montrer que G est le milieu de $[AJ]$
3. Montrer que G est le centre de gravité du triangle ACI.

Exercice 2.7. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et le point $A(5;3)$. Déterminer les coordonnées $(x;y)$ du point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$

Exercice 2.8. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, placer les points $A(-2;4)$, $B(4;2)$, $C(0;-1)$ et $D(-3;0)$. Soit E le milieu de $[AB]$. Déterminer la nature des quadrilatères $ABCD$ et $AECD$.

Exercice 2.9. Colinéarité et coordonnées

1. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{a}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{r}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{l}\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

2. Les points $A(3;4)$, $B(-5;7)$ et $C(14;17)$ sont-ils alignés ?
3. Dans chaque cas, déterminer x de telle sorte que les vecteurs soient colinéaires :

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{w}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{p}\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$

4. On considère les points $A(2;3)$, $B(5;-4)$ et $C(-7;m)$. Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles A, B et C sont alignés ? Si oui, les donner.
5. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, placer les points $A(1;3)$, $B(5;5)$, $C(3;2)$ et $D(5;3)$
   (a) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
   (c) En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$.

Exercice 2.10. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère $A(3;4)$, $B(5;2)$ et $C(2;-3)$.

1. Faîtes une figure de la situation que vous compléterez au fur et à mesure
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et celles du point E tel que $\overrightarrow{OE} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$
3. Démontrer que C, D et E sont alignés.
4. On considère le point $F(a;3)$.
   (a) Déterminer le nombre a pour que les points F, A et E soient alignés
   (b) Démontrer que les doirtes (AD) et (FC) sont parallèles.

Exercice 2.11. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère $A(1;4)$, $B(3;1)$ et $C(-3;-1)$.

1. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[AC]$
2. Calculer les coordonnées du point D symétrique de B par rapport à I
3. Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et J le milieu du segment $[AD]$.
   (a) Calculer les coordonnées de E et de J.
   (b) Montrer que les points B, E et J sont alignés.

Exercice 2.12. Soit $OIJK$ un parallélogramme. Les points A, B et G sont tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} \qquad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} \qquad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

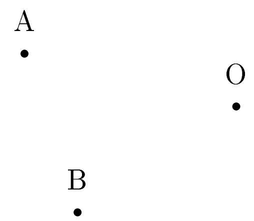
1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OK}$ dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$
3. En déduire que les points O,G et K sont alignés.

DEVOIR MAISON N°2

Exercice 3.1. (3 points)

Construire, sur la figure ci-dessous, à la règle et au compas, les points X, Y et Z tels que

$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{OZ} = 2\overrightarrow{AB}$$



Exercice 3.2. (3 points)

Soit PQR un triangle de centre de gravité A.

Soient I, J et K les symétriques de A respectivement par rapport à P, Q et R.

1. **Faire une figure** à la règle non graduée et au compas.
2. **Démontrer** que A est le centre de gravité du triangle IJK.

Exercice 3.3. (6 points)

Soit $ABCD$ un parallèlogramme.

1. **Construire** à la règle non graduée et au compas les points F et E tels que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$
2. **Construire** le point G tel que $AEGF$ soit un parallèlogramme
3. **Démontrer** que $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AC}$

   Indication : On pourra introduire le point F dans le vecteur $\overrightarrow{AG}$
4. **En déduire** que les points A, C et G sont alignés.

Exercice 3.4. (8 points)

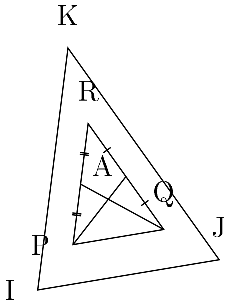
Soient $MNOP$ un parallèlogramme.

1. **Construire** les points E et F définis par : $\overrightarrow{ME} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PF} = -2\overrightarrow{PM}$
2. **Montrer** que $\overrightarrow{FE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP}$ et que $\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$

   Indication : On pourra introduire les points M et N dans les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{OE}$.
3. **Exprimer** $\overrightarrow{OE}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$
4. **En déduire** que les points E, F et O sont alignés.

Correction DM n°2

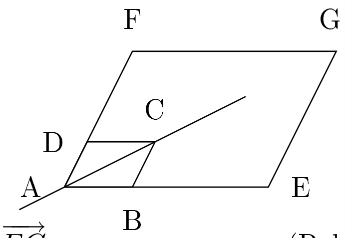
Exercice 3.2. (3 points)



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AK} &= 2\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{AR} && \text{car } I,\ J \text{ et } K \text{ les symétriques de } A \text{ respectivement}\\
&= 2\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}\right) && \text{par rapport à } P,\ Q \text{ et } R\\
&= 2\times\vec{0} && \text{car } A \text{ est le centre de gravité de } PQR\\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

Donc A est le centre de gravité du triangle IJK.

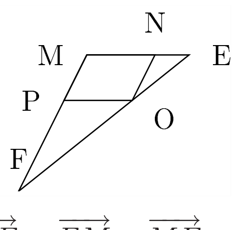
Exercice 3.3. (6 points)



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG} && \text{(Relation de Chasles)}\\
&= 3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}\\
&= 3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DC} = 3\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\\
&= 3\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, les droites (AC) et (AG) sont parallèles. Comme elles ont le point A de commun, elles sont confondues. Donc les points A, C et G sont alignés.

Exercice 3.4. (8 points)

1. 

2. $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{ME}=-3\overrightarrow{MP}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN}$

   $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NE}=-\overrightarrow{MP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

3. $\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{MP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FE}$
4. D'après 3) les droites (OE) et (EF) sont parallèles. Comme elles ont le point E de commun, elles sont confondues. Donc les points E, F et O sont alignés.

Devoir maison n°3

Exercice 4.1. (1 point)
Soient $\vec{u}(3;-5)$ et $\vec{v}(4;y)$. Quelle doit-être la valeur de y pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires ?

Exercice 4.2. (10 points)
ABC est un triangle. On définit les points M, I et K tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\quad \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ et I est le milieu de $[CM]$.

1. Prouver que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. Exprimer alors $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
3. Prouver que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
5. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$
6. Que peut-on en conclure pour les points A, I et K ?

Exercice 4.3. (9 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points $A(-3;2)$, $B(6;5)$ et $C(3;-1)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées de I, milieu de $[AB]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées de G, centre de gravité du ABC.
4. Déterminer les coordonnées du point D, tel que $ABCD$ soit un parallèlogramme.
5. Déterminer le point E de l'axe des abscisses et le point F, de l'axe des ordonnées, tels que A, B, E et F soient alignés.
6. On pose $K(2008;-1001)$. Les points A, C et K sont-ils alignés ?

Correction DM n°3

Exercice 4.1. $\vec{u}(3;-5)$ et $\vec{v}(4;y)$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles. Il faut et il suffit donc d'avoir : $y = \dfrac{4*(-5)}{3} = -\dfrac{20}{3}$.

Exercice 4.2.

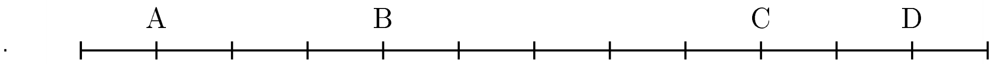
1. $$\begin{aligned} & \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0} \\ \iff & 2\overrightarrow{KC} = -\overrightarrow{KB} \\ \iff & 2\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KB} \\ \iff & 2\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} \quad \text{(Chasles)} \\ \iff & 2\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CB} \\ \iff & 3\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} \\ \iff & \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$
   Alors $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Figure
3. $$\begin{aligned} & \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} \quad \text{(Chasles)} \\ \iff & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \quad \text{(I milieu de [MC])} \\ \iff & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ \iff & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$
4. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{AB}(1;0)$, $\overrightarrow{AC}(0;1)$, $\overrightarrow{CK}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$
6. On a $\frac{1}{4}*\frac{2}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}*\frac{1}{3}$, donc les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont proportionnelles et les points A, I et K sont alignés.

Exercice 4.3.

1. Figure
2. On note $I(x_I;y_I)$. On a : $x_I = \dfrac{-3+6}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_I = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$. Donc $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.
3. On note $G(x_G;y_G)$. On a $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}$ donc
   $$\begin{cases} x_G - 3 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - 3\right) \\ y_G - (-1) = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{2} - (-1)\right) \end{cases} \iff . \begin{cases} x_G = 1 - 2 + 3 \\ y_G = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} - 1 \end{cases} \iff . \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 2 \end{cases}$$
4. On note $D(x_D;y_D)$. On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{cases} 6-(-3) = 3 - x_D \\ 5 - 2 = -1 - y_D \end{cases} \iff \begin{cases} 6 = -x_D \\ -4 = y_D \end{cases}$
5. On sait que $E(x_E;0)$ et $F(0;y_F)$ et $\overrightarrow{AB}(9;3)$. Alors $\overrightarrow{AE}(x_E+3;2)$ et $\overrightarrow{AF}(3;y_F-2)$.
   Les points A, B et E sont alignés ssi les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont porportionnelles, ce qui équivaut à $x_E + 3 = \dfrac{2*9}{3} = 6$. Donc $x_E = 3$.
   De même les points A, B et F sont alignées ssi $y_F - 2 = \dfrac{3*3}{9} = 1$. Donc $y_F = 3$.
   Dans ce cas, on a alors A, B, E et F alignés.
6. On a $\overrightarrow{AC}(6;-3)$ et $\overrightarrow{AK}(2011;-1003)$. Or $2011*(-3) \neq -1001*6$. Donc les points A, C et K ne sont pas alignés.

Devoir Surveillé n°2

Exercice 4.1. (2 points)
À partir de la droite graduée ci-dessous, compléter les égalités suivantes à l'aide d'un nombre réel.



$$\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{CD}\,; \quad \overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}\,; \quad \overrightarrow{AD} = \ldots \overrightarrow{DC}\,; \quad \overrightarrow{CB} = \ldots \overrightarrow{DA}$$

Exercice 4.2. (2 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(2; -1)$, $B(5; 3)$, $C(3005; 4003)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 4.3. (6 points)
ABC est un triangle, le point I est le milieu de $[AC]$, F est le symétrique de B par rapport à C, et D est le point défini par : $3\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA}$. .

1. Prouver que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA}$.
2. Faire une figure à la règle non graduée et au compas.
3. Exprimer $\overrightarrow{BF}$ puis $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
4. En remarquant que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$, déduire des questions précédentes l'expression du vecteur $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
5. Déduire des questions précédentes les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans le repère $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.
6. Montrer que les droites (DF) et (BI) sont parallèles.

Exercice 4.4. (10 points)
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(2; 5)$, $B(4; -2)$, $C(-5; 1)$ et $D(-1; 6)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la longueur du segment $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ? Justifier.
5. Le point G est tel que $ABCG$ soit un parallèlogramme.
   (a) Traduire cette propriété par une égalité vectorielle.
   (b) Calculer les coordonnées du point G.
6. On appelle I le milieu du segment $[BC]$. Déterminer les coordonnées du point I.
7. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
   (a) Placer à la règle graduée et au compas le point K.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BK}$ admet pour coordonnées $\left(-4; \dfrac{9}{2}\right)$
   (c) En déduire celles du point K.
8. Démontrer par le calcul que les points A, B et K sont alignés.

Devoir Surveillé n°2

Exercice 4.1. (2 points)

À partir de la droite graduée ci-dessous, compléter les égalités suivantes à l'aide d'un nombre réel.

$$\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{CD}\,; \quad \overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}\,; \quad \overrightarrow{AD} = \ldots \overrightarrow{DC}\,; \quad \overrightarrow{CB} = \ldots \overrightarrow{DA}$$

Exercice 4.2. (2 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(3005;4003)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 4.3. (6 points) ABC est un triangle de centre de gravité G. Le point Z est le milieu de $[AC]$.

1. Faire une figure à la règle non graduée et au compas.
2. Placer sur cette figure les points I, J et K tels que :
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{JC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
3. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK
4. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BZ}$
5. Démontrer que $BIJG$ est un parallèlogramme.

Exercice 4.4. (10 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;5)$, $B(4;-2)$, $C(-5;1)$ et $D(-1;6)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la longueur du segment $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ? Justifier.
5. Déteminer, en justifiant par des calculs, les coordonnées des points E, F, et G définis respectivement par :
   (a) $ABCE$ est un parallèlogramme
   (b) F est le symétrique de A par rapport à C
   (c) Les segments $[GD]$ et $[BC]$ ont le même milieu
6. Le point H est tel que $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (a) Construire H à la règle non graduèe et au compas
   (b) Retrouver les coordonnées du point H par le calcul.
7. Démontrer que B est le milieu du segment $[AG]$.