Chapitre 8 : Trigonométrie

C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 22 mai 2009

Table des matières

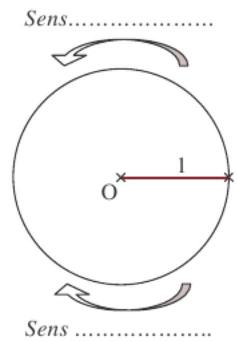
Cours : Trigonométrie

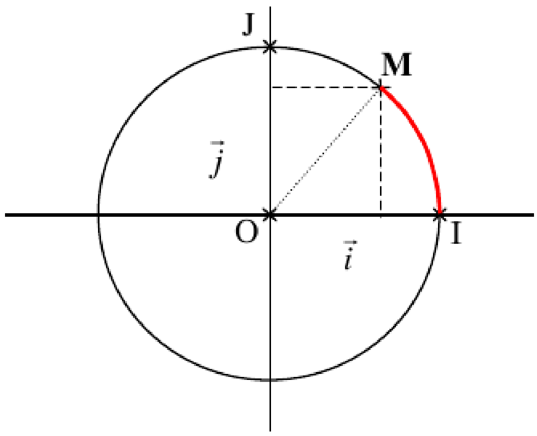
1 Mesure des angles en radians

1.1 Le cercle trigonométrique

Une unité de longueur est choisie dans le plan.

Définition 1. On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1 unité, munit d'un sens de rotation positif.





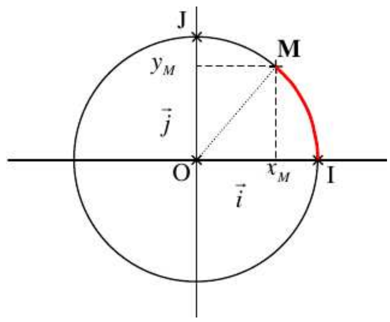
Considérons un cercle trigonométrique de centre O. Soient I et J deux points de ce cercle tels que $(OI) \perp (IJ)$. On définit alors un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Remarque : Il y a trois manières de repérer un point M sur un cercle :

- Par ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
- Par la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$
- Par la meusre de l'arc $\overset{\frown}{IM}$

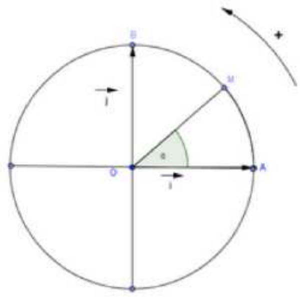
1.1.1 Repérage d'un point par ses coordonnées

Si les coordonnées d'un point M sont $(x_M;y_M)$, on peut le placer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



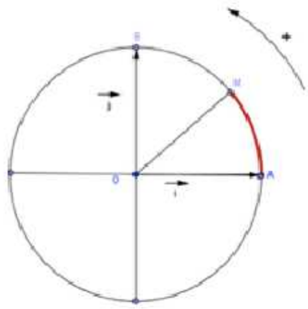
1.1.2 Repérage d'un point par une mesure d'angle

En connaissant la mesure de langle $\widehat{IOM}$, on peut placer le point M. Comme le cercle trigonométrique est orienté, il n'y a qu'une possibilité, au lieu des deux initiales.



1.1.3 Repérage d'un point par une mesure d'arc

En connaissant la longueur de l'arc $\widehat{IM}$, on peut placer le point M. Comme le cercle trigonométrique est orienté, il n'y a qu'une possibilité, au lieu des deux initiales.



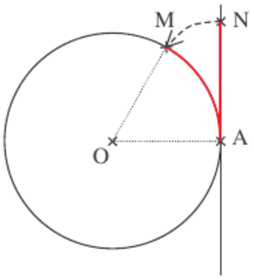
Nous allons établir un lien entre ces trois manières de repérer un point sur le cercle trigonométrique.

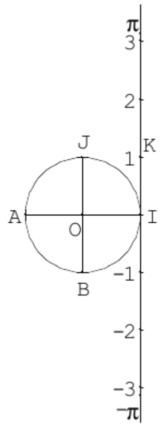
1.2 Enroulement de la droite des réel sur le cercle trigonométrique

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* TP Géoplan

On considère un cercle trigonométrique muni d'un repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, et une droite graduée d tangente au cercle en I. On enroule cette droite autour du cercle.

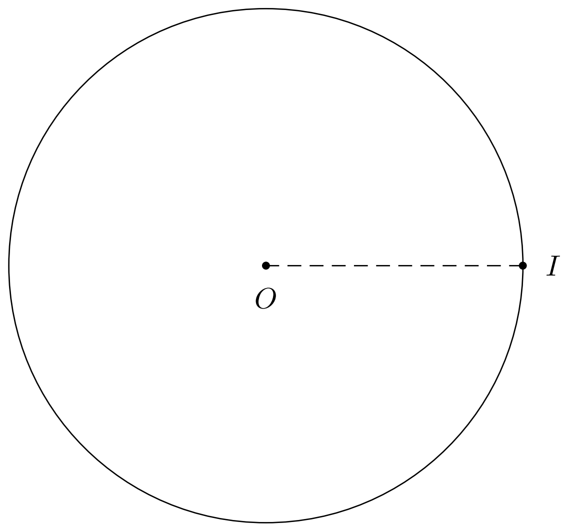
Propriété 1. À tout nombre réel x correspond un **unique** point N sur la droite d d'abscisse x. À ce point N de la droite d correspond un **unique** point M sur le cercle trigonométrique. Le point M est associé au réel x.





Exercice 1.1. Dans quel quart de cercle se situe le réel 1 ? le réel -1 ?

Travail de l'élève : Le but de cette activité est de percevoir les liens entre la longueur d'un arc $\widehat{IM}$ *et la mesure de l'angle* $\widehat{IOM}$. Voic un cercle trigonométrique :



1. Quelle est la longueur du périmètre de ce cercle ?
2. Quel est le point correspondant au réel 0 ? Y en a-t-il plusieurs ?
3. Trouver trois autres réels associés au point I ?
4. Soit x un réel et M le point asocié à x. Quels sont les réels associés au point M ?
5. Compléter le tableau ci-dessous (dans la 2ème ligne, on donnera des réels compris entre 0 et 2π) :

Points M (à placer)	I	A	J	B	C	D	E
Mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOM}$	360		90		60		30
Mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$	

6. De quel type de tableau s'agit-il ?
7. Comment passe-t-on de la deuxième à la troisième ligne ?

Propriété 2. À chaque réel x correspond un unique point M. Par contre, si un point M est associé au réel x, alors il est aussi associé à tous les réels de la forme $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

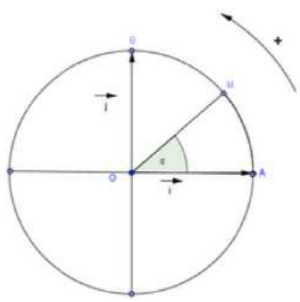
Exemple : Le point I est associé aux réels : $\ldots\ldots -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots\ldots$

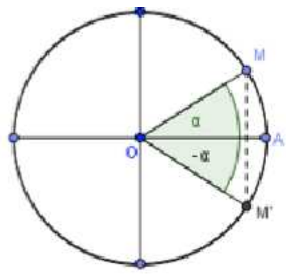
Exercice 1.2. Donner deux réels associés à chacun des points cardinaux d'un cercle trigonométrique, nommés dans le sens positif I, J, A, B.

1.3 Le Radian

Définition 2. Soient I et M deux points d'un cercle trigonométrique de centre O. La mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ est la mesure orienté de l'arc $\widehat{IM}$. Le radian est noté « rad ».

Remarque : Pour connaître la mesure orientée d'un arc, il suffit d'enrouler la droite des réels autour du cercle comme fait précédemment. Ainsi des angles de même mesure en degrés mais orientés dans des sens différents auront des mesures opposées en radians.

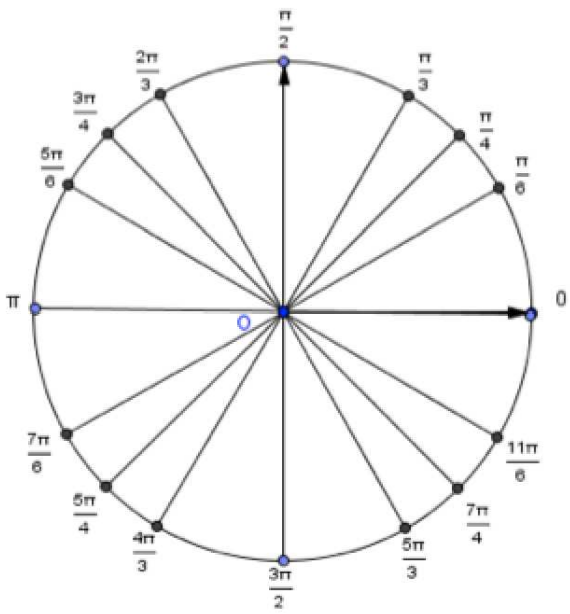




Remarque : La mesure d'un arc étant proportionnelle à la valeur de l'angle en degrés, on obtient le tableau de proportionnalité suivant, à savoir retrouver :

Angles en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Angles en degrés	360	180	90	60	45	30

On peut alors placer les points suivants sur le cercle trigonométrique (à savoir faire) :



Exercice 1.3.

1. Un angle a pour mesure 150°. Quelle est sa mesure exacte en radians ?
2. Un angle a pour mesure $\dfrac{3\pi}{10}$ en radians. Quelle est sa mesure en degrés, à 10^{-3} près ?
3. Combien de degrés vaut 1 radian, à 0.1 près ?

2 Sinus et cosinus d'un nombre réel

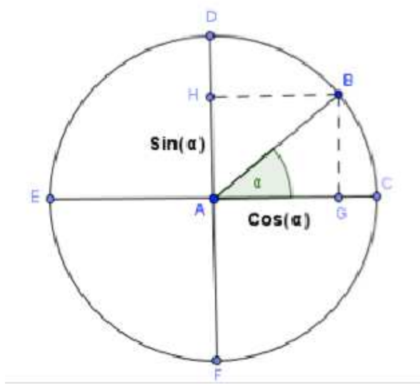
2.1 Sinus et cosinus

Travail de l'élève : Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre A muni d'un repère $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$.
On note B un point du cercle tel que $\widehat{CAB} = x$ rad, avec $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
On note G le projeté orthogonal de B sur $(A; \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de B sur $(A; \overrightarrow{AD})$.

1. Faire une figure
2. Calculer AG en fonction de x
3. Calculer AH en fonction de x
4. Que représente ces valeurs pour le point B ?

La défintion suivante généralise la propriété de l'activité à l'ensemble du cercle trigonométrique.

Définition 3. Soit x un nombre réel et M son point associé sur un cercle trigonométrique muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On appelle cosinus de x, noté $cos(x)$, l'abscisse du point M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On appelle sinus de x, noté $sin(x)$, l'ordonnée du point M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



Propriété 3. Avec les notations de la définition précédente, on a :
- Dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, M a pour coordonées $(cos(x); sin(x))$.
- Pour tout réel x on a $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$ (Pythagore)
- Pour tout réel x on a $-1 \leq cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq sin(x) \leq 1$
- Pour tout réel x on a $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$ et $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$ où $k \in \mathbb{Z}$

Preuve : Evident

Exercice 2.1.

1. Donner les valeurs possibles de $sin(x)$ lorsque $cos^2(x) = \frac{1}{2}$
2. Encadrer $sin(3x)$ et $-\frac{3}{2}\cos(x) + 2$
3. Montrer les deux égalités suivantes pour tout réel x :

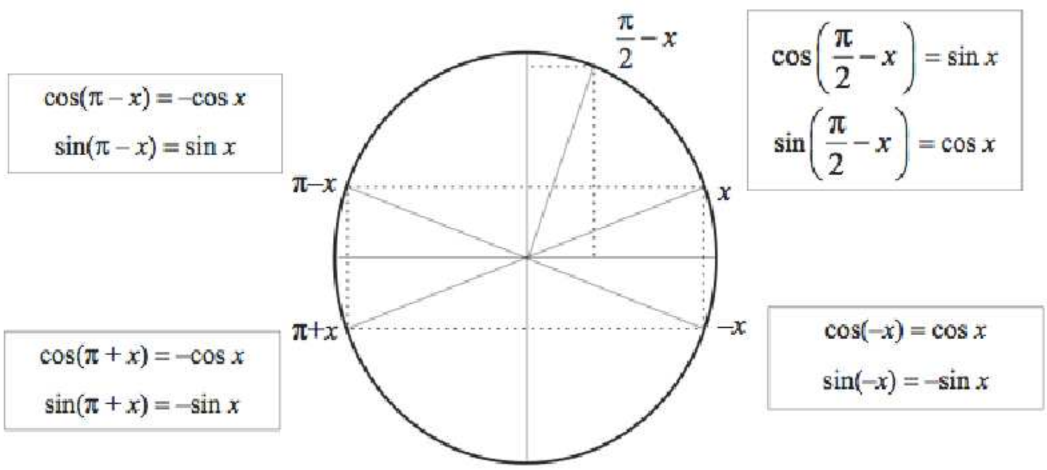
$$(cos(x) - 1)\,(cos(x) + 1) = -sin^2(x) \qquad\qquad (cos(x) + sin(x))^2 = 1 + 2sin(x)cos(x)$$

Les valeurs à connaître : *Travail de l'élève :*

1. Soit ABC un triangle équilatéral dont la longueur d'un côté vaut a et H le pied de la hauteur issue de A.
   (a) Calculer AH en fonction de a
   (b) Déterminer la mesure en radians des angles géométriques $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH}$.
   (c) En déduire $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet principal A tel que $AB = a$.
   (a) Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$
   (b) En déduire $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

La configuration du rectangle :



Exercice 2.2.

1. Donner les valeurs de $cos(18\pi)$, $sin\left(\frac{18\pi}{3}\right)$ et $cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

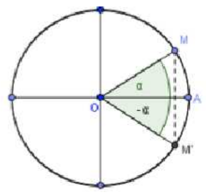
2. Simplifier $cos(-\pi) + cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3. On donne $cos\left(\pi 5\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Déterminer $sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. Déterminer le cosinus et le sinus de $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

Exercice 2.3. Exprimer à l'aide de $sin(x)$ et $cos(x)$ les expressions suivantes :
- $A = cos(x+\pi) - cos(-x) + 5cos(x)$
- $B = sin(\pi - x) + 2sin(x+2\pi) + sin(x+3\pi)$
- $C = sin(\pi + x)cos(\pi - x) - sin(\pi - x)cos(\pi + x)$
- $D = sin(x+11\pi) + sin(11\pi - x) - cos(11\pi - x)$

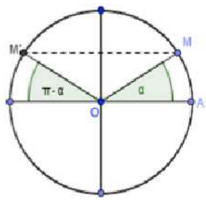
2.2 Les équations trigonométriques (facultatif)

Soit a un réel donné.

$cos(x) = cos(a)$
$\Longleftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi,$ avec $k \in \mathbb{Z}$



$sin(x) = sin(a)$
$\Longleftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi,$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Exemple : Résoudre $sin(x) = sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $cos(x) = sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 2.4. À l'aide d'une figure, résoudre les équations et inéquations suivantes :
1. $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$
2. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$
3. $cos(x) \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$
4. $sin(x) < \frac{1}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$

3 Fonctions circulaires

3.1 Définition

Définition 4. On appelle fonction cosinus, notée cos, la fonction qui a tout réel x associe $cos(x)$.
On appelle fonction sinus, notée sin, la fonction qui a tout réel x associe $sin(x)$.

Définition 5. On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si pour tout réel x on a $f(x+T) = f(x)$.

Conséquences graphiques : Si f a pour période T et que l'on trace sa courbe représentative sur un intervalle de longueur T (par exemple sur $[0;T[$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right[$) on obtient le reste de la courbe par translation de vecteur $\pm T\vec{i}$.
On limitera donc notre étude sur un intervalle de longueur la période.

Propriété 4. Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Exercice 3.1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $g(x) = cos(2x)$.
Montrer que f est périodique de période 4π et trouver la période de g.

3.2 Etude de la fonction cosinus

...

3.3 Etude de la fonction sinus

Les Annexes

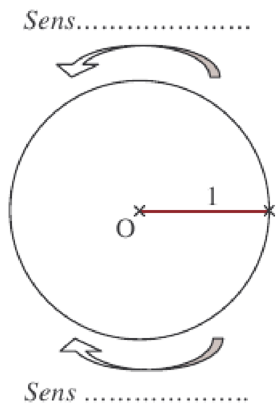
Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique

<u>Définition</u> : Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle :

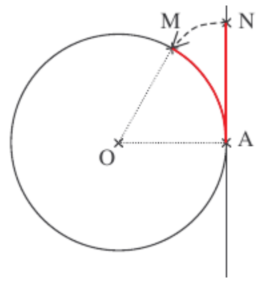
- Le sens direct (ou positif) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre
- Le sens indirect (ou négatif) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre

Une unité de longueur est choisie dans le plan.
On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.



Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique et A un point de $\mathcal{C}$. On considère la tangente (d) au cercle $\mathcal{C}$ en A comme un axe gradué d'origine A. Elle représente alors l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On enroule la droite (d) autour du cercle $\mathcal{C}$.



<u>A l'aide de géoplan</u> :

1. (a) Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ de Géoplan, tracer un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et placer A de coordonnées $(1;0)$. Expliquer pourquoi $A \in \mathcal{C}$.
   (b) Donner l'équation de la tangente (d) à $\mathcal{C}$ en A. La tracer.
   (c) Donner les coordonnées des points I et I' sur (d) tel que $OI = OI' = OA$. On choisira I le point d'ordonnée positive. Placer I.

   Appeler le professeur pour valider la figure.
2. Trouver le périmètre du cercle $\mathcal{C}$.
3. (a) Placer le point $B(1;2\pi)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Expliquer pourquoi $B \in (d)$. Quelle est l'abscisse de B dans le repère $(A;\overrightarrow{AI})$?
   (b) Quel est le point B' de $\mathcal{C}$ tel que l'arc orienté $\widehat{AB'}$ mesure la longueur AB ?
   (c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOB'}$?
4. (a) Placer le point $C \in (d)$ d'abscisse π dans le repère $(A;\overrightarrow{AI})$.
   (b) Trouver dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les coordonnées du point C' de $\mathcal{C}$ tel que l'arc orienté $\widehat{AC'}$ mesure AC. Le placer.

(c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOC'}$?

On se place désormais dans le repère $(A; \overrightarrow{AI})$.

5. (a) Placer le point $D \in (d)$ d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

   (b) Placer le point D' de $\mathcal{C}$ tel que l'arc orienté AD' mesure AD.

   (c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOD'}$?

6. (a) Placer le point E sur (d) d'abscisse $\dfrac{3}{2}\pi$.

   (b) Placer le point E' de $\mathcal{C}$ tel que l'arc orienté $\widehat{AE'}$ mesure AE.

   (c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOE'}$?

7. (a) Placer le point F sur (d) d'abscisse $-\dfrac{\pi}{2}$.

   (b) Placer le point F' de $\mathcal{C}$ tel que l'arc orienté $\widehat{AF'}$ mesure AF.

   (c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOF'}$?

8. (a) Faire un tableau, dans lequel on rentrera dans la première ligne la mesure des arcs orientés et dans la deuxième ligne la mesure des angles orientés correspondants.

   (b) Quelle remarque pouvez-vous faire sur ce tableau ?

   Appeler le professeur pour valider les résultats.

9. *On veut maintenant construire pour tout point N de la droite (d), d'abscisse x dans le repère $(A; \overrightarrow{AI})$, le point M sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que l'arc orienté $\widehat{AM}$ mesure x.*

   (a) Placer un point N sur (d). Afficher son abscisse x.

   (b) *En admettant qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$ et la mesure de l'arc orienté $\widehat{AM}$*, trouver la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$ en fonction de x.

   (c) Construire M, en utilisant une rotation bien choisie.

   (d) Afficher la mesure en degré de l'angle orienté $\widehat{AOM}$.

   (e) Afficher la mesure en *radian* de l'angle orienté $\widehat{AOM}$. Que remarquez-vous ?

   (f) Déplacer N sur la droite (d) et constater le déplacement correspondant du point M sur le cercle $\mathcal{C}$. Vérifier la cohérence de votre construction en plaçant N sur les points B, C, D, E, F et G déjà créés.

10. Sans passer par l'intermédiaire de la droite (d), construire les points P, Q et R sur le cercle $\mathcal{C}$, correspondants à des points de (d) d'abscisses respectives $\dfrac{\pi}{4}$, -3π et $-\dfrac{3}{4}\pi$.

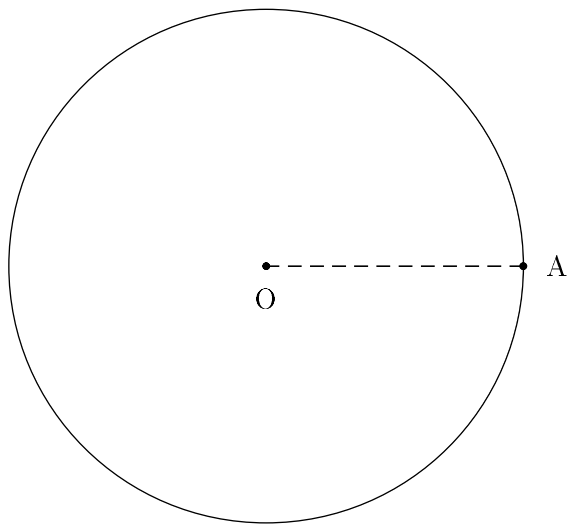
    Appeler le professeur pour valider la figure.

Remarques :

- La demi-droite $[AI)$, formée des points d'abscisses positives, s'enroule dans le sens . . . .
- La demi-droite $[AI')$, formée des points d'abscisses . . . . , s'enroule dans le sens . . . .

Exercice 1.1. Placer sur le cercle ci-dessous les points B, C, D, ... tels que :

- $\widehat{AB} = 3\pi$
- $\widehat{AC} = 4\pi$
- $\widehat{AD} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- $\widehat{AE} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$
- $\widehat{AF} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- $\widehat{AG} = \frac{\pi}{2} - 12\pi$
- $\widehat{AH} = \frac{\pi}{4} + 6\pi$
- $\widehat{AI} = \frac{3\pi}{2}$
- $\widehat{AJ} = \frac{5\pi}{2}$
- $\widehat{AK} = \frac{7\pi}{2}$
- $\widehat{AL} = -\frac{\pi}{3}$
- $\widehat{AM} = \frac{5\pi}{3}$



Que remarque-t-on ? Proposer une explication.

Une nouvelle unité d'angle : le Radian

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AI})$ de la partie précédente et l'on utilise les mêmes notations.
Propriété : A tout nombre réel x correspond un **unique** point N sur la droite (d) d'abscisse x.
A tout point N de la droite (d) correspond un **unique** point M sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
On introduit une nouvelle unité de mesure des angles telle que sur un cercle trigonométrique, le même nombre réel exprime la longueur de l'arc de cercle orienté AM et la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$.
Définition : Soit A et M deux points d'un cercle trigonométrique, tels que la longueur de l'arc orienté AM soit égale à 1. On définit **1 radian** comme étant la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$.
Le radian a pour abéviation « rad ».

Exercice 1.2. *On utilise les notations du TP sur géoplan.* Compléter le tableau suivant :

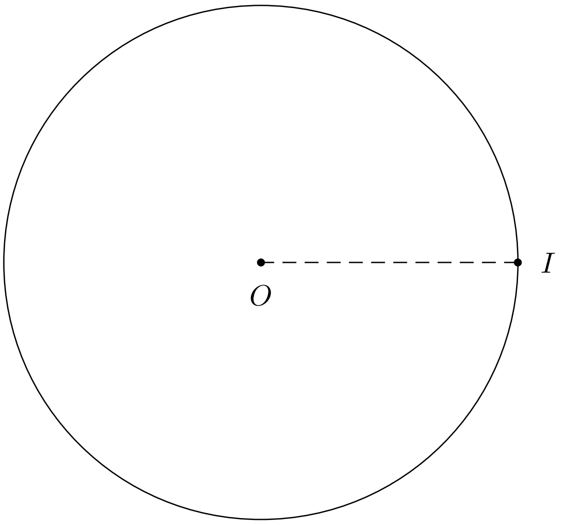
Mesure de l'arc $\widehat{AM}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$							
Mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOM}$							

Exercice 1.3.

1. Quelle sera la mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{2}{3}\pi$ rad ? $\dfrac{5}{6}\pi$ rad ? $\dfrac{3}{15}\pi$ rad ?
2. Quelle sera la mesure exacte en radians d'un angle mesurant 135° ? 50° ? 35° ?

Une nouvelle unité d'angle : le radian

Le but de cette activité est de percevoir les liens entre la longueur d'un arc $\widehat{IM}$ *et la mesure de l'angle* $\widehat{IOM}$. Voic un cercle trigonométrique :



1. Quelle est la longueur du périmètre de ce cercle ?
2. Quel est le point correspondant au réel 0 ? Y en a-t-il plusieurs ?
3. Trouver trois autres réels associés au point I ?
4. Soit x un réel et M le point asocié à x. Quels sont les réels associés au point M ?
5. Compléter le tableau ci-dessous (dans la 2$^{\text{ème}}$ ligne, on donnera des réels compris entre 0 et 2π) :

Points M (à placer)	I	A	J	B	C	D	E
Mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOM}$	360		90		60		30
Mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$	

6. De quel type de tableau s'agit-il ?
7. Comment passe-t-on de la deuxième à la troisième ligne ?

Sinus et cosinus d'un nombre réel

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre A muni d'un repère $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$.
On note B un point du cercle tel que $\widehat{CAB} = x$ rad, avec $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
On note G le projeté orthogonal de B sur $(A; \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de B sur $(A; \overrightarrow{AD})$.

1. Faire une figure
2. Calculer AG en fonction de x
3. Calculer AH en fonction de x
4. Que représente ces valeurs pour le point B ?

Valeurs remarquables de sinus et cosinus

1. Soit ABC un triangle équilatéral dont la longueur d'un côté vaut a et H le pied de la hauteur issue de A.
   (a) Calculer AH en fonction de a
   (b) Déterminer la mesure en radians des angles géométriques $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH}$.
   (c) En déduire $cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
2. Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet principal A tel que $AB = a$.
   (a) Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$
   (b) En déduire $cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 2.1.

1. Un angle a pour mesure 150°. Quelle est sa mesure exacte en radians ?
2. Un angle a pour mesure $\dfrac{3\pi}{10}$ en radians. Quelle est sa mesure en degrés, à 10^{-3} près ?
3. Combien de degrés vaut 1 radian, à 0.1 près ?

Exercice 2.2.

1. Donner les valeurs possibles de $sin(x)$ lorsque $cos^2(x) = \dfrac{1}{2}$
2. Encadrer $sin(3x)$ et $-\dfrac{3}{2}\cos(x) + 2$
3. Montrer les deux égalités suivantes pour tout réel x :

$$(cos(x) - 1)\,(cos(x) + 1) = -sin^2(x) \qquad\qquad (cos(x) + sin(x))^2 = 1 + 2sin(x)cos(x)$$

Exercice 2.3.

1. Donner les valeurs de $cos(18\pi)$, $sin\left(\dfrac{18\pi}{3}\right)$ et $cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
2. Simplifier $cos(-\pi) + cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$
3. On donne $cos\,(\pi 5) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Déterminer $sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
4. Déterminer le cosinus et le sinus de $\dfrac{4\pi}{5}$ et $\dfrac{9\pi}{5}$.

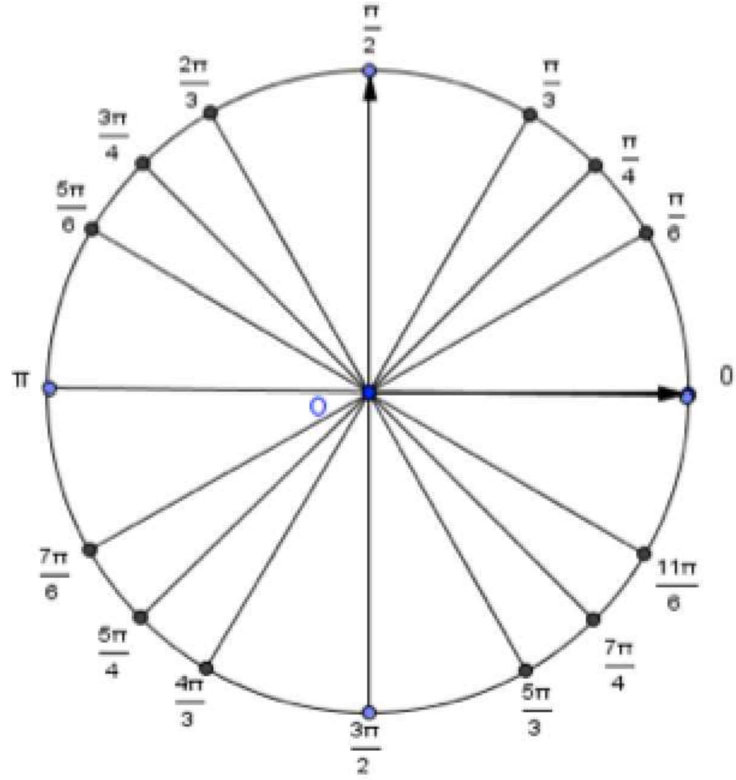
Exercice 2.4. Exprimer à l'aide de $sin(x)$ et $cos(x)$ les expressions suivantes :

- $A = cos(x + \pi) - cos(-x) + 5cos(x)$
- $B = sin(\pi - x) + 2sin(x + 2\pi) + sin(x + 3\pi)$
- $C = sin(\pi + x)cos(\pi - x) - sin(\pi - x)cos(\pi + x)$
- $D = sin(x + 11\pi) + sin(11\pi - x) - cos(11\pi - x)$

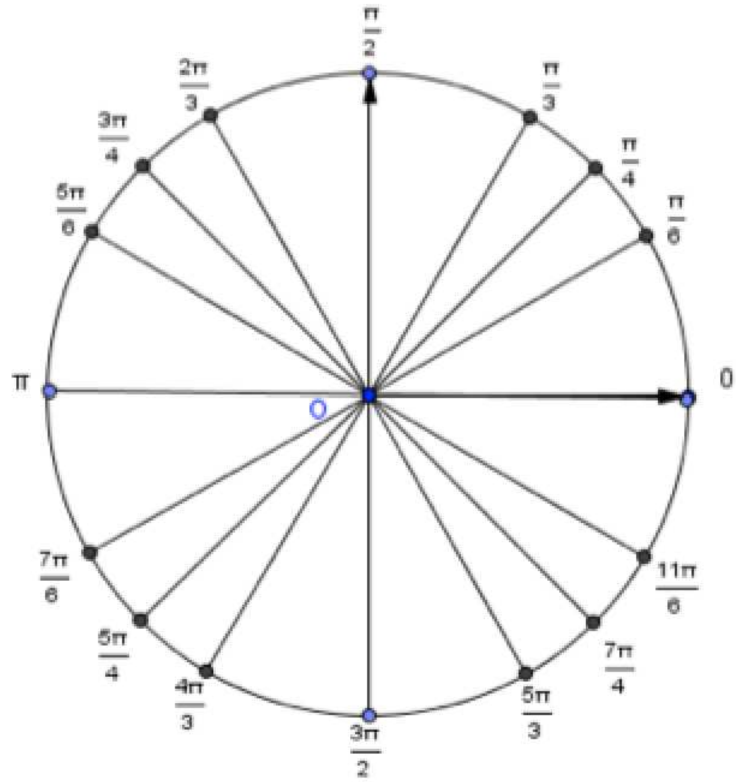
Exercice 2.5. À l'aide d'une figure, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$
2. $sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$
3. $cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$
4. $sin(x) < \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$

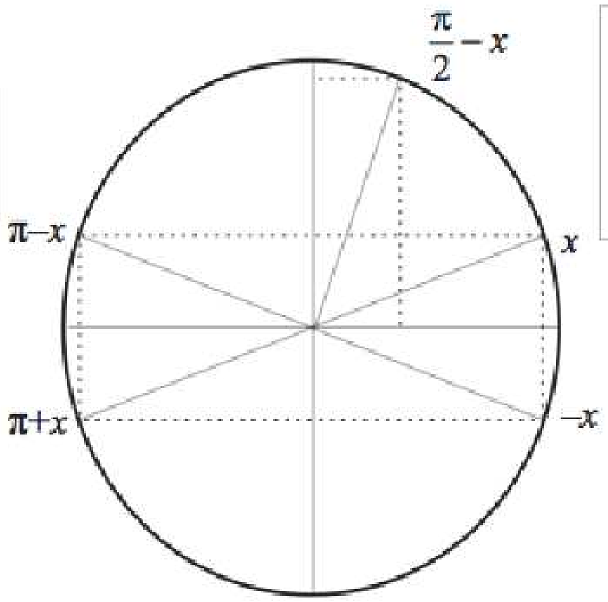
Exercice 2.6. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $g(x) = cos(2x)$. Montrer que f est périodique de période 4π et trouver la période de g.



$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
π
0
O
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
π
0
O
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$

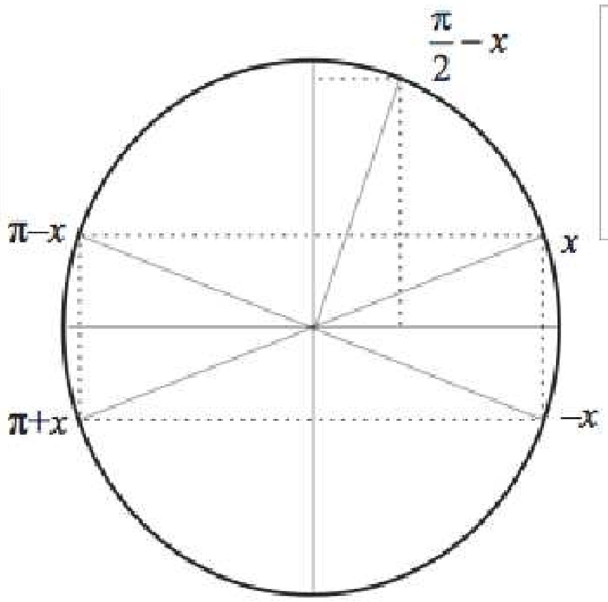


$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$



$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

Devoir Surveillé 7

Exercice 2.1. (1 point)

1. Convertir en radians : $157°$.
2. Convertir en degrés : $-\frac{\pi}{8}$.

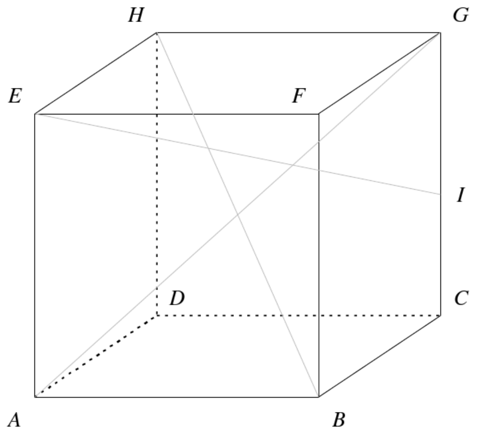
Exercice 2.2. (7 points)

1. Faire un cercle trigonométrique (unité 5 cm) et y placer les angles : $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{4}$
2. Donner la valeur exacte de $\cos(-\frac{\pi}{3})$, $\sin(137\pi)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ en détaillant la méthode.
   On utlisera les valeurs remarquables du sinus et cosinus ainsi que la configuration du rectangle
3. Un angle appartient à l'intervalle $[\pi; 2\pi]$ et son cosinus vaut $\frac{1}{3}$. Quel est son sinus ?
4. Quels sont les angles ayant pour sinus $-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Exercice 2.3. (2 points)
On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) + \sin(2x)$

1. Montrer que f est 2π-périodique.
2. Etudier la parité de f.
3. Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Exercice</u> 2.4. (5 points)
On considère un cube $ABCDEFGH$ et I un point de l'arête $[GC]$.



1. Préciser, en justifiant les réponses, si les éléments suivants sont coplanaires ou non :
   (a) Les droites (EH) et (BC)
   (b) Les droites (AG) et (BH)
   (c) Les droites (AG) et (EI)
   (d) Les droites (BH) et (EI)
2. Déterminer sans justifier la position relative des plans (EGB) et (ACH).
3. Expliquer pourquoi (EH) est perpendiculaire au plan (DCG).

<u>Exercice</u> 2.5. (7 points)
On considère une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S, de base carrée $ABCD$ dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On pose $AB = a$. On appelle I le milieu de $[SA]$, J le milieu de $[SB]$ et O le centre de $ABCD$.

1. Faire une figure en prenant $a = 5$ cm.
2. Montrer que $AC = a\sqrt{2}$.
3. Démontrer (SA) et (SC) sont perpendiculaires.
4. Déterminer, sans justifier les réponses, les intersections suivantes :
   (a) des plans (SAB) et (SBC)
   (b) des plans (SAC) et (SBD)
   (c) de la droite (SO) et du plan (ADC)
5. (a) Démontrer que les points A, C, S, O et I sont coplanaires.
   (b) En déduire que les droites (CI) et (SO) sont sécantes. Que représente leur intersection pour le triangle SAC ?
6. Déterminer sans justifier la position relative des droites (SB) et (AC).
7. Démontrer que (IJ) est parallèle au plan (ABC).