Chapitre 3 : Mettre de l'ordre dans sa tête

D. Zancanaro C. Aupérin

2008-2009

"J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes
comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague,
mes deux bêtes d'aversion"
Stendhal

Dernière modification : 29 mars 2009

Table des matières

Cours : Ordre

Profiter de ce chapitre pour insister sur les implications et équivalences

Règle des signes :
- Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif
- Le produit de deux nombres de deux signes opposés est un nombre négatif.

1 $\mathbb{R}$: Un ensemble totalement ordonné

Dans toutes cette partie, a, b, c et d désignent des réels.
Tous les résultats et règles énoncés ici avec des inégalités strictes restent valables (sauf indication contraire) avec des inégalités larges.

1.1 Comparer deux nombres

Définition 1. On a :
- $a < b$ si et seulement si $a - b < 0$
- $a > b$ si et seulement si $a - b > 0$

Remarques :
- En mathématiques, on écrit : $a < b \iff a - b < 0$.
- Cela signifie : " Si $a < b$ alors $a - b < 0$ " ET " Si $a - b < 0$ alors $a < b$".
- Il s'agit d'une **équivalence** (l'hypothèse et la conclusion de cette règle sont interchangeables, ou encore, le théorème direct ET sa réciproque sont vrais tous les deux).

Méthode 1 : Pour comparer deux nombres, on peut regarder le signe de leur différence.

Exemples :

1. $3 - 5 = -2 < 0$ donc $3 < 5$
2. $-5 - (-3) = -2 < 0$ donc $-5 < -3$
3. $\dfrac{36}{5} - \dfrac{37}{6} = \dfrac{31}{30} > 0$ donc $\dfrac{36}{5} > \dfrac{37}{6}$

Application 1. Soient c et d deux nombres réels. Comparer $c^2 + d^2$ et $(c + d)^2$

Propriété 1. (Transitivité) Si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$

Remarques :

– En mathématique, on écrit : $\left.\begin{array}{r} a<b \\ b<c \end{array}\right\} \implies a<c$

– Il s'agit d'une **implication** (on ne sait pas si la réciproque est vraie)

Méthode 2 : Pour comparer deux nombres, on peut les comparer à un même troisième (par exemple 0 ou 1)

Exemples :

1. $-27457985 < 0$ et $0 < 36851674$ donc $-27457985 < 36851674$
2. $\dfrac{1456}{2000} < 1$ et $\dfrac{451}{400} > 1$ donc $\dfrac{1456}{2000} < 1 < \dfrac{451}{400}$.

1.2 Ordre et addition

Le principe de la balance :

Charlotte et David jouent à "who's the biggest brain". Charlotte est pour l'instant en tête.
- S'ils gagnent chacun autant de points dans une partie qui suit, l'équilibre sera le même.
- De même, s'ils perdent autant de points chacun.

Mathématiquement, cette conservation s'écrit :

Propriété 2.
- Si $a<b$ alors $a+c<b+c$ et $a-c<b-c$
- Si $a<b$ et $c<d$ alors $a+c<b+d$

Remarques :

$$a<b \implies \left\{\begin{array}{l} a+c<b+c \\ a-c<b-c \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} a<b \\ c<d \end{array}\right\} \implies a+c<b+d$$

Exemples : $2<3$. Si on ajoute 5 à chaque membre de l'inégalité, elle devient : $7<8$
Si on retranche alors 2 à chaque membre, elle devient $5<6$.

Application 2. Dans un autre jeu, voici les points accumulés par Charlotte et David :

$$\underbrace{48\,;\,-8\,;\,21\,;\,\frac{15}{7}}_{\text{David}} \qquad \underbrace{21\,;\,-14\,;\,\frac{7}{6}\,;\,x}_{\text{Charlotte}}$$

David a encore perdu mais il ne se rappelle plus son dernier score x. Il cherche à retrouver ce score.
- Est-ce possible ?
- Aidez-le à trouver le plus d'informations possible sur son score.

Exercice 1.1. Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droites graduée.

Exercice 1.2. Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$.

1.3 Ordre et multiplication

Travail de l'élève :

1. Compléter le tableau suivant à l'aide des signes $>$ ou $<$:

$3 \ldots\ldots 4$	$7 \ldots\ldots 2$	$-3 \ldots\cdots -5$	$-1 \ldots\cdots -0.5$	$0 \ldots\ldots 6$
$6 \ldots\ldots 8$	$14 \ldots\ldots 4$	$6 \ldots\cdots -10$	$-2 \ldots\cdots -1$	$0 \ldots\ldots 12$
$-6 \ldots\cdots -8$	$-14 \ldots\cdots -4$	$6 \ldots\ldots 10$	$2 \ldots\ldots 1$	$0 \ldots\cdots -12$
$18 \ldots\ldots 24$	$42 \ldots\ldots 12$	$-18 \ldots\cdots -30$	$-6 \ldots\cdots -3$	$0 \ldots\ldots 36$

2. En observant les lignes de ce tableau, que remarquez-vous sur l'ordre de deux nombres que l'on a multiplié par un nombre positif ?

3. Même question pour une multiplication par un nombre négatif.

Mathématiquement, cette conservation s'écrit :

Propriété 3.
Si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$
Si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$
Si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $ac < bd$

Remarques :

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array}\right\} \implies a \times c < b \times c \qquad \left.\begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \end{array}\right\} \implies a \times c > b \times c$$

- Autrement dit, multiplier chaque membre d'une inégalité par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité
- En revanche, multiplier chaque membre d'une inégalité par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité
- $\left.\begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array}\right\} \implies a \times c < b \times d$

Exercice 1.3.

1. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$. Donner un encadrement de $3x - 2y$.
2. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y < 2$. Montrer que $2 \leq xy < 6$.
3. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$. Donner un encadrement de xy.

2 Comparer des carrés, des racines carrés et des inverses

2.1 Carré et racine carrée

Propriété 4. Soient a et b deux réels **positifs**. On a :

$$a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2 \qquad et \qquad a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

<u>*Preuve*</u> :

– On applique troisième la règle sur la multiplication

– On applique 1).

Exemples :

1. Soit x un réel tels que $2 \leq x \leq 4$. Donner un encadrement de $-3x^2$.
2. Soit y un réel tels que $\frac{1}{3} \leq y \leq 9$. Donner un encadrement de de $2\sqrt{y} - 1$.

<u>Exercice</u> 2.1.

1. Soit x un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5x-1} \leq 2$. Donner un encadrement de x.
2. Soit y un réel tels que $-\frac{7}{2} \leq -\frac{1}{2}y^2 + 1 \leq \frac{7}{8}$. Donner un encadrement de y.

2.2 Inverse

Propriété 5. Soient a et b deux réels **strictement positifs**. On a : $a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Exemples : Soit x un réel tels que $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $-\frac{4}{x}$.

On sait maintenant comparer les carrés, les racines carrées et les inverses des nombres positfis. Dans le cas des nombres négatifs, on va se ramener à ce que l'on sait faire, ie au cas des nombres positifs, en commençant par les multiplier par -1.

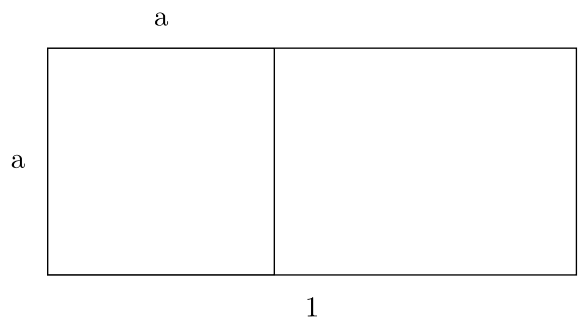
<u>Exercice</u> 2.2.

1. Soit x un réel tels que $-2 \leq x \leq -1$. Donner un encadrement de $2x^2 + 1$.
2. Soit y un réel tels que $-5 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de $\frac{10}{x}$.

2.3 Comparer a, a^2 et a^3 pour $a \geq 0$

<u>*Travail de l'élève*</u> *:*

1. Pour quelles valeurs évidentes de a pouvez-vous dire que $a = a^2 = a^3$?
2. **On suppose maintenant que** $0 < a < 1$**.**
   On peut alors représenter le rectangle suivant :



   - En s'aidant de ce rectangle, comparer a et a^2.
   - Schématiser un pavé droit de longueur 1, de hauteur a et de profondeur a.
   - Faire apparaître à l'int{erieur de ce pavé un cube de côté a.
   - Comparer alors a^2 et a^3.
3. **On suppose maintenant que** $a > 1$**.**
   En s'inspirant de ce qui précède, dessiner un schéma approprié et comparer a et a^2, puis a^2 et a^3.

Propriété 6. Soit a un réel **positif**.
– Si $a = 0$ ou $a = 1$ alors $a = a^2 = a^3$
– Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a$
– Si $a > 1$ alors $a < a^2 < a^3$

Exemple : Comparer les nombres 2π, $4\pi^2$ et $8\pi^3$. Puis comparer $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

3.1 Les inéquations

<u>**Définition**</u> **2.** Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue pour que l'inéquation soit vérifiée.

<u>Méthode</u> : Pour résoudre une inéquation, on part de l'inéquation, puis on écrit une suite d'inéquations équivalentes d'après les propriétés du cours (on écrit donc $\Longleftrightarrow$ entre chaque) jusqu'à arriver à un encadrement de l'inconnue.

Exemple : Résoudre l'inéquation $-9 < 7x - 2 \leq 12$, puis représenter sur une droite graduée l'ensemble des solutions de cette inéquation.

Remarque : Cet ensemble est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on le note : $]-1;2]$.
L'intervalle $]-1;2]$ est l'ensemble qui contient tous les nombres réels compris entre -1 exclus et 2 inclus.
On note les solutions de l'inéquation de la façon suivante : $S =]-1;2]$

3.2 Intervalles

<u>Définition</u> 3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$. On le note $[a;b]$.
a et b sont les bornes de l'intervalle $[a;b]$.

Remarque : On dit qu'un intervalle est borné si et seulement si ses deux bornes sont finies (ie deux réels).

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a;+\infty[$	Intervalle fermé
		$]a;+\infty[$	

Remarque : On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$
- $\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Exercice 3.1.

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3}; \sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5}; +\infty\right[$$

Exercice 3.2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $0 \leq -\sqrt{\frac{1}{4}}x + 7 < 2$

Exercice 3.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $-3(x+5) - (2x+3) \leq 4(x-1) - 3(2+x)$

Exercice 3.4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(2x+3)(x-1) \geq (3+x)(5+2x)$

Exercice 3.5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} < 4 - \frac{x}{3}$

3.3 Intersection et réunion

3.3.1 Intersection

Travail de l'élève : Position du problème :
Soient deux inéquations $\begin{cases} (I_1) : -17 < 2x - 5 \leq 21 \\ (I_2) : -95 \leq -6x + 1 < 19 \end{cases}$.
On cherche les réels qui sont solutions de (I_1) ET (I_2), c'est-à-dire les solutions **communes** de (I_1) et de (I_2). Proposer une méthode pour répondre à cette question.

Définition 4. L'**intersection** de deux intervalles I et J est un ensemble noté $I \cap J$. On lit "I inter J". C'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois à I ET à J.

Remarque : $I \cap J$ est aussi un intervalle.

Exercice 3.6.

1. Déterminer l'intersection de I et J dans les cas suivants :
   (a) Si $I = \left]-\frac{1}{2};6\right[$ et $J = [-4;2]$
   (b) Si $I = [0;7[$ et $J =]-1;0.5[$
   (c) Si $I =]-4;2]$ et $J = [-7;3[$
   (d) Si $I = \left]-\frac{1}{2};6\right[$ et $J = [14;22]$
2. Donner toutes les intersections possibles de ces trois intervalles :

$$A = [1;7[\qquad B =]0;11] \qquad C =]8.5;13]$$

3.3.2 Réunion

Travail de l'élève : Position du problème :

Soient deux inéquations $\begin{cases} (I_1) : -17 < 2x - 5 \leq 21 \\ (I_2) : -95 \leq -6x + 1 < 19 \end{cases}$.

On cherche les réels qui sont solutions de (I_1) OU de (I_2), c'est-à-dire les solutions soit de (I_1) soit de (I_2). Proposer une méthode pour répondre à cette question.

> **Définition 5.** La **réunion** de deux intervalles I et J est un ensemble noté $I \cup J$. On lit "I union J". C'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I OU à J.

Remarque : $I \cup J$ n'est pas toujours un intervalle.

Exercice 3.7.

1. Déterminer l'intersection de I et J dans les cas suivants :
   (a) Si $I = \left]-\frac{1}{2};6\right[$ et $J = [-4;2]$
   (b) Si $I = [0;7[$ et $J =]-1;0.5[$
   (c) Si $I =]-4;2]$ et $J = [-7;3[$
   (d) Si $I = \left]-\frac{1}{2};6\right[$ et $J = [14;22]$
2. Donner toutes les intersections possibles de ces trois intervalles :

$$A = [1;7[\qquad B =]0;11] \qquad C =]8.5;13]$$

4 Tableau de signes

4.1 Signe d'un monôme

Définition 6. Un monôme est une expression littérale de la forme $ax + b$ avec $a \neq 0$.

Travail de l'élève : On cherche à connaître le signe de différents monômes.

1. Etude du signe de $2x - 3$:
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 = 0$
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 < 0$
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 > 0$
   - Consigner ces résultats dans ce tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$		0	

2. Mêmes questions pour l'expression $-3x - 4$
3. Cas général : Étudier le signe de $ax + b$ où a et b sont des réels et $a \neq 0$

De l'activité précédente on peut conclure que le signe du monôme $ax + b$ (où a et b sont des réels et $a \neq 0$), est donné par le signe du réel a. Pour généraliser, on peut dresser le tableau de signe suivant, qui fonctionne pour tous les monômes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

Exercice 4.1. Établir le tableau de signe des monômes $5x - 3$, $-x + 1$ et $\dfrac{1}{2}x + 4$

4.2 Signe d'un produit de monômes

Comme on sait trouver le signe de n'importe quel monôme, grâce à la règle des signes dans une multiplication, on peut trouver le signe du produit de plusieurs monômes. On utlise pour cela un tableau de signe, afin d'être plus rapide.

Exemple : Étudier le signe de $P(x) = (2x + 1)(-x + 2)$.

On étudie le tableau de signe de chacun des facteurs :

$2x + 1 > 0 \Longleftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$ et $-x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x < 2$

On place ces informations dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- $P(x) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{2}; 2\right[$
- $P(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[$
- $P(x) = 0$ ssi $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

On sait ainsi que les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ est $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[$

Méthode de résolution d'inéquations avec des produit de monômes :

- Tout faire apparaâitre dans le même membre
- Factoriser le membre non nul
- Dresser son tableau de signe
- Donner l'ensemble des solutions

Exercice 4.2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x+4)(-2x+1) \geq 0 \qquad x^2 \leq 9 \qquad x^2 > 25$$

Exercice 4.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$4(x-2)^2 \leq 9 \qquad (x+3)^2 < (2x+1)^2 \qquad (x^2-5)(x+3)(x^2+3) \leq 0$$

4.3 Signe d'un quotient de monômes

On procéde comme pour un produit de monome, sauf que l'on doit en plus s'assurer que le quotient est défini.

Exemple : Étudier le signe de l'expression $\frac{3-x}{4x-1}$.

Contrainte : $4x-1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \frac{1}{4}$ On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{3-x}{4x-1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Résoudre l'inéquation $\frac{3-x}{4x-1} \leq 0$.

Remarque : Sur la TI 89, taper SOLVE.

Méthode de résolution d'inéquations avec des expressions rationnelles :

- Trouver l'ensemble d'étude de l'inéquation
- Tout faire apparaître dnas le même membre
- Mettre au même dénominateur le membre non nul
- Factoriser le numérateur et le dénominateur
- Dresser le tableau de signe de l'expression rationnelle factorisée
- Donner son ensemble de solutions

<u>Exercice</u> 4.4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$(3-x)(2+x)(1-x) < 0 \qquad (x-2)(3x-4) \geq (x-2)(2x+6) \qquad \frac{-x+5}{-4-2x} > 0$$

.

<u>Exercice</u> 4.5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\frac{(1+x)^2(5-x)}{1-2x} \leq 0 \qquad \frac{(x^2+1)(x-2)}{(2-x)(3-2x)} > 0 \qquad \frac{4-x}{8-x} \geq \frac{1-3x}{2+x}$$

.

<u>Exercice</u> 4.6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x-3}{2x+1} \qquad \frac{25-x^2}{3x+2} > 0 \qquad \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)} \leq 0$$

.

Exercice 4.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\frac{2x+3}{x-1} \leq 4 \qquad \frac{9}{(x+1)^2} > 1 \qquad \frac{2x+3}{x+4} \geq 3$$

.

Exercice 4.8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$x \leq x^2 \qquad x \geq x^3 \qquad \frac{1}{x} \leq x \qquad x^3 \leq x^2 \qquad \frac{1}{x} > x^3 \qquad x^2 \geq \frac{1}{x}$$

.

Les Annexes

Ordre et Multiplication

1. Compléter le tableau suivant à l'aide des signes $>$ ou $<$:

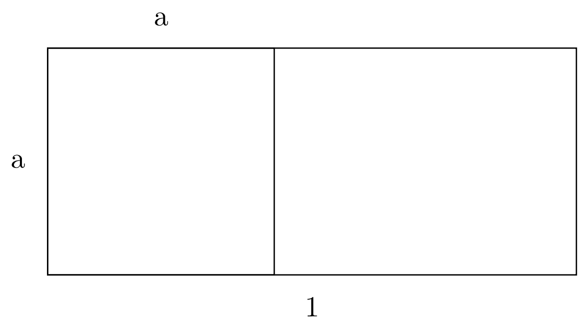
$3 \ldots\ldots 4$	$7 \ldots\ldots 2$	$-3 \ldots\cdots -5$	$-1 \ldots\cdots -0.5$	$0 \ldots\ldots 6$
$6 \ldots\ldots 8$	$14 \ldots\ldots 4$	$6 \ldots\cdots -10$	$-2 \ldots\cdots -1$	$0 \ldots\ldots 12$
$-6 \ldots\cdots -8$	$-14 \ldots\cdots -4$	$6 \ldots\ldots 10$	$2 \ldots\ldots 1$	$0 \ldots\cdots -12$
$18 \ldots\ldots 24$	$42 \ldots\ldots 12$	$-18 \ldots\cdots -30$	$-6 \ldots\cdots -3$	$0 \ldots\ldots 36$

2. En observant les lignes de ce tableau, que remarquez-vous sur l'ordre de deux nombres que l'on a multiplié par un nombre positif ?

3. Même question pour une multiplication par un nombre négatif.

Comparer a, a^2 et a^3 pour $a \geq 0$

1. Pour quelles valeurs évidentes de a pouvez-vous dire que $a = a^2 = a^3$?
2. **On suppose maintenant que $0 < a < 1$.**
   On peut alors représenter le rectangle suivant :



   - En s'aidant de ce rectangle, comparer a et a^2.
   - Schématiser un pavé droit de longueur 1, de hauteur a et de profondeur a.
   - Faire apparaître à l'int{erieur de ce pavé un cube de côté a.
   - Comparer alors a^2 et a^3.
3. **On suppose maitenant que $a > 1$.**
   En s'inspirant de ce qui précède, dessiner un schéma approprié et comparer a et a^2, puis a^2 et a^3.

Mettre de l'ordre dans ses idées

Exercice 1.1. Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droites graduée.

Exercice 1.2. Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$.

Exercice 1.3.

1. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$. Donner un encadrement de $3x - 2y$.
2. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y < 2$. Montrer que $2 \leq xy < 6$.
3. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$. Donner un encadrement de xy.

Exercice 1.4.

1. Soit x un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5x - 1} \leq 2$. Donner un encadrement de x.
2. Soit y un réel tels que $-\frac{7}{2} \leq -\frac{1}{2}y^2 + 1 \leq \frac{7}{8}$. Donner un encadrement de y.

Exercice 1.5.

1. Soit x un réel tels que $-2 \leq x \leq -1$. Donner un encadrement de $2x^2 + 1$.
2. Soit y un réel tels que $-5 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de $\frac{10}{x}$.

Exercice 1.6. Résoudre l'inéquation suivante : $0 \leq -\sqrt{\frac{1}{4}}x + 7 < 2$

Exercice 1.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $-3(x + 5) - (2x + 3) \leq 4(x - 1) - 3(2 + x)$

Exercice 1.8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(2x + 3)(x - 1) \geq (3 + x)(5 + 2x)$

Exercice 1.9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} < 4 - \frac{x}{3}$

Exercice 1.10.

1. Déterminer l'intersection de I et J dans les cas suivants :
   (a) Si $I = \left]-\frac{1}{2}; 6\right[$ et $J = [-4; 2]$
   (b) Si $I = [0; 7[$ et $J =]-1; 0.5[$
   (c) Si $I =]-4; 2]$ et $J = [-7; 3[$

(d) Si $I = \left]-\frac{1}{2};6\right[$ et $J = [14;22]$

2. Donner toutes les intersections possibles de ces trois intervalles :

$$A = [1;7[\qquad B =]0;11] \qquad C =]8.5;13]$$

Exercice 1.11. Même exercice que précédemment mais pour la réunion d'intervalles.

Exercice 1.12. Établir le tableau de signe des monômes $5x-3$, $-x+1$ et $\frac{1}{2}x+4$

Exercice 1.13. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x+4)(-2x+1) \geq 0 \qquad x^2 \leq 9 \qquad x^2 > 25$$

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$4(x-2)^2 \leq 9 \qquad (x+3)^2 < (2x+1)^2 \qquad (x^2-5)(x+3)(x^2+3) \leq 0$$

Exercice 1.15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$(3-x)(2+x)(1-x) < 0 \qquad (x-2)(3x-4) \geq (x-2)(2x+6) \qquad \frac{-x+5}{-4-2x} > 0$$

.

Exercice 1.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\frac{(1+x)^2(5-x)}{1-2x} \leq 0 \qquad \frac{(x^2+1)(x-2)}{(2-x)(3-2x)} > 0 \qquad \frac{4-x}{8-x} \geq \frac{1-3x}{2+x}$$

.

Exercice 1.17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x-3}{2x+1} \qquad \frac{25-x^2}{3x+2} > 0 \qquad \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)} \leq 0$$

.

Exercice 1.18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\frac{2x+3}{x-1} \leq 4 \qquad \frac{9}{(x+1)^2} > 1 \qquad \frac{2x+3}{x+4} \geq 3$$

.

Exercice 1.19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$x \leq x^2 \qquad x \geq x^3 \qquad \frac{1}{x} \leq x \qquad x^3 \leq x^2 \qquad \frac{1}{x} > x^3 \qquad x^2 \geq \frac{1}{x}$$

.

Intervalles

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a; +\infty[$	Intervalle fermé
		$]a; +\infty[$	

Remarque : On note :

$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ $\qquad$ $\mathbb{R}^* = \dots$ $\qquad$ $\mathbb{R}^{-*} = \dots$

$\mathbb{R}^- = \dots$ $\qquad$ $\mathbb{R}^{+*} = \dots$ $\qquad$ $\mathbb{R} = \dots$

Exercice 1.20.

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3}; \sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5}; +\infty\right[$$

Devoir Maison n°3

Exercice 2.1. (3 points)
Soient m et p deux nombres réels strictement positifs tels que $m < p$.

1. Comparer $\dfrac{1}{-3+2m}$ et $\dfrac{1}{-3+2p}$
2. Comparer $\sqrt{\dfrac{m+1}{5}}$ et $\sqrt{\dfrac{p+1}{5}}$

Exercice 2.2. (4.5 points)
Soit b un réel tel que $2 < b \leq 3$.

1. Donner un encadrement de $\dfrac{2+b^2}{5}$
2. On se donne de plus un réel a tel que : $2 < a \leq 5$. Donner un encadrement de $b-2a$, puis de $\dfrac{5}{b-2a}$

Exercice 2.3. (1.5 points)
Soit $a = \sqrt{2}-1$. Ranger les nombres a, a^2 et a^3 dans l'ordre croissant, sans calculer, en justifiant par une propriété.

Exercice 2.4. (2 points)
Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $A = x + \dfrac{1}{x}$ et $B = 2$.
Comparer A et B suivant la valeur de x.

Exercice 2.5. (3 points)
Dresser dans chacun des cas le tableau de signes de $A(x)$.

1. $A(x)$ s'annule en 5 et -2 ; $A(x)$ est positif pour $x > -2$; $A(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty;-2[$
2. $A(x)$ n'existe pas en -1 ; le réel 3 est l'unique solution de l'équation $A(x) = 0$; $A(x) \leq 0$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1;3]$ et $A(x) > 0$ pour $x > 3$

Exercice 2.6. (6 points)
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2+1 \geq 0$
2. $(2x-5)(-x-3) \geq 0$
3. $(x-4)(-3x+9)+(x-4)(x-7) \leq 0$
4. $3x(x-2)(-5+x) < 0$
5. $(2x-5)(-x-3) \leq 15$
6. $\dfrac{3x-1}{2-x} \leq 0$

<u>Exercice</u> 2.7. Lorsque l'on ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{3}{7}$, on obtient un résultat supérieur à $\frac{2}{3}$. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ?

<u>Exercice</u> 2.8. On considère un carré $ABCD$ de côté 8 cm. Soit x un réel tel que $x \in]0;8[$, et les points A, N, P et Q tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ} = -x\overrightarrow{AD}$

1. Faire une figure pour un x quelconque dans l'intervalle considéré.
2. Démontrer que $MNPQ$ est un carré.
3. Démontrer que l'aire $A(x)$ du carré $MNPQ$ vaut $4(x-4)^2 + 32$
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $A(x) \geq 50$

Correction DM n°3

Exercice 2.1. (3 points)

1. Eratum : On considère de plus $2 < m < p$

$$\begin{aligned} 2 < m < p &\overset{\times(-2)<0}{\iff} -4 > -2m > -2p \\ &\overset{+3}{\iff} -1 > 3-2m > 3-2p \\ &\overset{\times(-1)<0}{\iff} 1 < -3+2m < -3+2p \\ &\overset{inverse\ sur >0}{\implies} \frac{1}{-3+2m} > \frac{1}{-3+2p} \\ &\overset{\times(-1)<0}{\iff} \frac{1}{3-2m} < \frac{1}{3-2p} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0 < m < p &\overset{+1}{\iff} 1 < m+1 < p+1 \\ &\overset{/5}{\iff} \frac{1}{5} < \frac{m+1}{5} < \frac{p+1}{5} \\ &\overset{racine\ sur >0}{\implies} \sqrt{\frac{m+1}{5}} < \sqrt{\frac{p+1}{5}} \end{aligned}$$

Exercice 2.2.

1.

$$\begin{aligned} 2 < b \leq 3 &\overset{carre\ sur >0}{\iff} 4 < b^2 \leq 9 \\ &\overset{+2}{\iff} 6 < 2+b^2 \leq 11 \\ &\overset{/5}{\iff} \frac{6}{5} < \frac{2+b^2}{5} \leq \frac{11}{5} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 1 \leq a < 2 &\overset{\times(-2)<0}{\iff} -2 \geq -2a > -4 \\ &\iff -4 < -2a \leq -2 \\ &\implies 2+(-4) < b+(-2a) \leq 3+(-2) \\ &\iff -2 < b-2a \leq 1 \end{aligned}$$

3. On a $\quad -2 < b-2a \leq 1 \overset{/5}{\iff} -\frac{2}{5} < \frac{b-2a}{5} \leq \frac{1}{5}$

Pour passer à l'inverse, on a besoin que les nombres soient tous de même signe et non nuls. Donc si $b = 2a$, le nombre $\frac{5}{b-2a}$ n'existe pas. Sinon, on décompose l'inégalité suivant deux cas :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} < \frac{b-2a}{5} < 0 &\overset{\times(-1)<0}{\iff} \frac{2}{5} > -\frac{b-2a}{5} > 0 \\ &\overset{inverse\ sur >0}{\implies} \frac{5}{2} < -\frac{5}{b-2a} \\ &\overset{\times(-1)<0}{\iff} -\frac{5}{2} > \frac{5}{b-2a} \\ \text{Et} \quad 0 < \frac{b-2a}{5} \leq \frac{1}{5} &\overset{inverse\ sur >0}{\implies} \frac{5}{b-2a} \geq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Finalement $\frac{5}{b-2a} \in]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup [\frac{1}{5}; +\infty[$

Exercice 2.3. On a $0 < a < 1$ donc $a > a^2 > a^3$.

<u>Exercice</u> 2.4. $A - B = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$
Donc si $x = 1$, alors $A - B = 0$, c'est-à-dire $A = B$.
Si $x \neq 1$, on a $(x-1)^2 > 0$ et $x > 0$, donc $A - B > 0$, c'est-à-dire $A > B$.

<u>Exercice</u> 2.5.

1.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$A(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

<u>Exercice</u> 2.6.

1. $x^2 + 1 \geq 0$ C'est toujours le cas, donc $S = \mathbb{R}$
2. $(2x-5)(-x-3) \geq 0$

   $2x - 5 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{5}{2}$ et $-x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -3$

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-5)(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $S = [-3; \frac{5}{2}]$

3. $(x-4)(-3x+9) + (x-4)(x-7) \leq 0 \Longleftrightarrow (x-4)(-2x+2) \leq 0$

   $x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 4$ et $-2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-4)(-2x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $S =]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[$

4. $3x(x-2)(-5+x) < 0$

$$3x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad , \quad x-2=0 \Longleftrightarrow x=2 \quad \text{et} \quad -5+x=0 \Longleftrightarrow x=5$$

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-5+x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x-2)(-5+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; 0[\cup]2 ; 5[$

5. $(2x-5)(-x-3) \leq 15 \Longleftrightarrow (2x-5)(-x-3) - 15 \leq 0 \Longleftrightarrow -2x^2 - 6x + 5x + 15 - 15 \leq 0 \Longleftrightarrow -2x^2 - x \leq 0 \Longleftrightarrow -x(2x+1) \leq 0$

$$-x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad 2x+1=0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$-$		$+$	
$-x(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]0 ; +\infty[$

6. $\dfrac{3x-1}{2-x} < 0$

$$\text{Contrainte : } 2-x \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 2 \quad \text{et} \quad 3x-1=0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x-1}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$S =]-\infty ; \frac{1}{3}[\cup]2 ; +\infty[$

Devoir Surveillé n°3

Exercice 3.1. (4.5 points)
Soient x et y deux réels tels que $-4 \leq x \leq -1$ et $6 \leq y < 8$.
Déterminer un encadrement de $A = \dfrac{x+y}{3}$, de $B = \dfrac{3}{2y-4}$ et de $C = \dfrac{x^2}{3}$.

Exercice 3.2. (3 points)
Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Comparer $\dfrac{3-2a^2}{5}$ et $\dfrac{3-2b^2}{5}$
2. Comparer $-5\sqrt{2a}$ et $-5\sqrt{2b}$

Exercice 3.3. (1.5 points)
Soit $a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$. Ranger les nombres a, a^2 et a^3 dans l'ordre croissant, sans calculer, en justifiant par une propriété.

Exercice 3.4. (3 points)
L'étude du signe de $B(x)$ a permis d'établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ?

1. $B(4.5)$ est négatif
2. Si $x \leq 0$ alors $B(x) \leq 0$
3. L'ensemble des solutions de $0 \geq B(x)$ est $]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$
4. $B(1) = 0$
5. -2 et 3 sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$
6. $B(x) > 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 3$

Exercice 3.5. (8 points)
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-\sqrt{x} > 0$
2. $(3x+4)(2x+3) \leq 0$
3. $\dfrac{(4x-7)}{3x+2} \geq 0$
4. $\dfrac{-5}{x(x-1)} > 0$
5. $(x-4)(-3x+2) - (x-4)(x-7) \leq 0$
6. $(x+1)^2 \leq (2x-3)^2$

Devoir Surveillé n°3

Exercice 3.1. (4.5 points)

Soient x et y deux réels tels que $-4 \leq x \leq -1$ et $8 \leq y < 10$.

Déterminer un encadrement de $A = \dfrac{3}{2y+4}$, de $B = \dfrac{x^2}{3}$ et de $C = \dfrac{x-y}{3}$.

Exercice 3.2. (3 points)

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Comparer $-5\sqrt{3+2a}$ et $-5\sqrt{3+2b}$
2. Comparer les nombres $P = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}$ et $Q = \dfrac{4}{a+b}$ *(On pourra calculer $P - Q$).*

Exercice 3.3. (1.5 point)

Soit $a = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}$. Ranger les nombres a, a^2 et a^3 dans l'ordre croissant, sans calculer, en justifiant par une propriété.

Exercice 3.4. (3 points)

L'étude du signe de $B(x)$ a permis d'établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ?

1. $B(4.5)$ est négatif
2. Si $x \leq 0$ alors $B(x) \leq 0$
3. L'ensemble des solutions de $0 \geq B(x)$ est $]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$
4. $B(1) = 0$
5. -2 et 3 sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$
6. $B(x) > 0 \iff -2 < x < 3$

Exercice 3.5. (8 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x-1)^2 + 4 \geq 0$
2. $(3x+4)(2x+3) \leq 0$
3. $\dfrac{-5}{x(x-1)} > 0$
4. $\dfrac{(4x-7)}{3x+2} \geq 4$
5. $(x+1)^2 \leq (2x-3)^2$
6. $\dfrac{x^2(x+3)}{x^2-1} + \dfrac{x^2(x-3)}{x-1} > 0$

Correction DS n°3

Exercice 3.1. (4 points)

$$6 \leq y < 8 \Leftrightarrow 12 \leq 2y < 16 \Leftrightarrow 8 \leq 2y-4 < 12 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2y-4} > \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{3}{8} \geq \frac{3}{2y-4} > \frac{3}{12}$$

Exercice 3.2. (2 points)

1. $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 > -2a^2 > -2b^2 \Leftrightarrow 3 > 3-2a^2 > 3-2b^2 \Leftrightarrow \frac{3}{5} > \frac{3-2a^2}{5} > \frac{3-2b^2}{5}$
2. $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < 2a < 2b \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2a} < \sqrt{2b} \Leftrightarrow 0 > -5\sqrt{2a} > -5\sqrt{2b}$

Exercice 3.3. (2 points)

$a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} > 1$ donc $a < a^2 < a^3$.

Exercice 3.4. (3 points)

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

1. $B(4.5)$ est négatif : VRAI
2. Si $x \leq 0$ alors $B(x) \leq 0$: FAUX
3. L'ensemble des solutions de $0 \geq B(x)$ est $]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$: VRAI
4. $B(1) = 0$: FAUX
5. -2 et 3 sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$: VRAI
6. $B(x) > 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 3$: FAUX

Exercice 3.5. (9 points)

1. $(3x+4)(2x+3) \leq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x+4$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$(3x+4)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2};-\frac{4}{3}\right]$

2. $\dfrac{4x-7}{3x+2} \geq 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{7}{4}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{4x-7}{3x+2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left[\dfrac{7}{4}; +\infty\right[$

3. $(x-4)(-3x+2)-(x-4)(x-7) \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)[(-3x+2)-(x-7)] \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)[(-4x+9)] \leq 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{9}{4}$		4		$+\infty$
$-4x+9$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-4)(-4x+9)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{9}{4}\right] \cup [4; +\infty[$

Correction DS n°3

Exercice 3.1. (4 points)

$$8 \leq y < 10 \Leftrightarrow 16 \leq 2y < 20 \Leftrightarrow 20 \leq 2y+4 < 24 \Leftrightarrow \frac{1}{20} \geq \frac{1}{2y+4} > \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{3}{20} \geq \frac{3}{2y+4} > \frac{3}{24}$$

$$-4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq -x \geq 1 \Leftrightarrow 16 \geq x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{16}{3} \geq \frac{x^2}{3} \geq \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ 8 \leq y < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ -10 < -y \leq -8 \end{cases} \Rightarrow -14 < x - y \leq -9$$

Exercice 3.2. (2 points)

1.

$$0 < a < b \Leftrightarrow 0 < 2a < 2b \Leftrightarrow 3 < 3+2a < 3+2b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{3+2a} < \sqrt{3+2b} \Leftrightarrow -5\sqrt{3} > -5\sqrt{3+2a} > -5\sqrt{3+2b}$$

Exercice 3.3. (2 points)

$a = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5} > 1$ donc $a < a^2 < a^3$.

Exercice 3.4. (3 points)

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

1. $B(4.5)$ est négatif : VRAI
2. Si $x \leq 0$ alors $B(x) \leq 0$: FAUX
3. L'ensemble des solutions de $0 \geq B(x)$ est $]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$: VRAI
4. $B(1) = 0$: FAUX
5. -2 et 3 sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$: VRAI
6. $B(x) > 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 3$: FAUX

Exercice 3.5. (9 points)

1. $(x-1)^2 + 4 \geq 0$ Un carré est toujours positif, donc $\mathcal{S} = \emptyset$
2. $(3x+4)(2x+3) \leq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(3x+4)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}\right]$

3. $\dfrac{-5}{x(x-1)} > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
-5		$-$	|	$-$	|	$-$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-5}{x(x-1)}$		$-$	||	$+$	||	$-$	

$\mathcal{S} =]0;1[$

4. $\dfrac{4x-7}{3x+2} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{4x-7}{3x+2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-7}{3x+2} - \dfrac{4(3x+2)}{3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-8x-15}{3x+2} \geq 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{15}{8}$		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$-8x-15$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$3x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-8x-15}{3x+2}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$\mathcal{S} = \left[-\dfrac{15}{8}; -\dfrac{2}{3}\right[$

5. $(x+1)^2 \leq (2x-3)^2$

6. $\dfrac{x^2(x+3)}{x^2-1} + \dfrac{x^2(x-5)}{x-1} > 0$