Chapitre 5 : Géométrie Plane

C. Aupérin

2008-2009

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 9 mars 2009

Table des matières

Cours : Géométrie plane

1 Se rappeler du collège

1.1 Les classiques

Fiche sur Pythagore, Thalès et la trigonométrie. Exercices 3 + 6 + 5

1.2 Droites remarquables du triangle

Fiche sur Hauteurs, médianes, bissectrices et médiatrices. Exercices 1 + 2

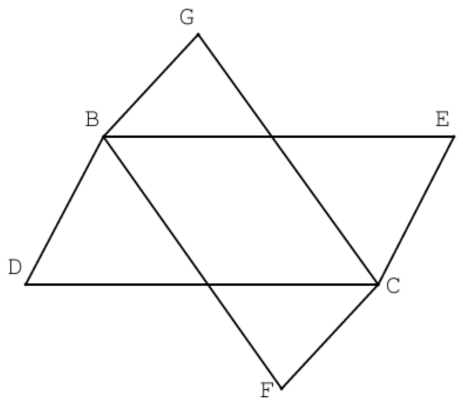
1.3 Les angles

Fiche sur les angles correspondants, alternes, inscrit dans un cercle ... Exercices 4 + 7 + 8

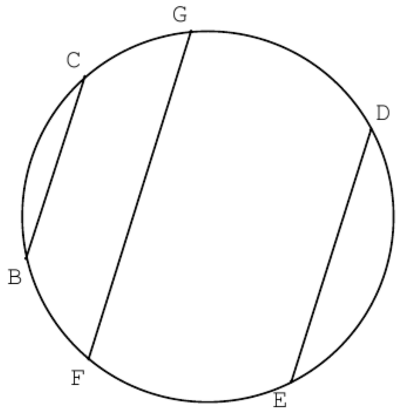
2 Les isométries

Travail de l'élève : Dans chacun des cas suivants, trouver une transformation qui amène B sur C, D sur E et F sur G.

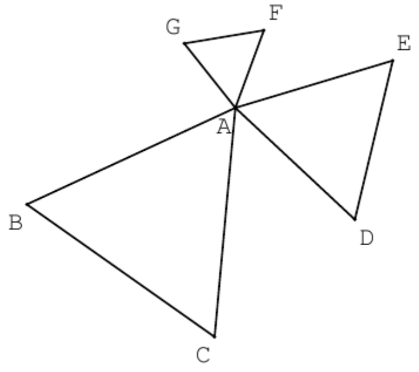
1. Avec deux parallélogrammes BDCE et BFCG :



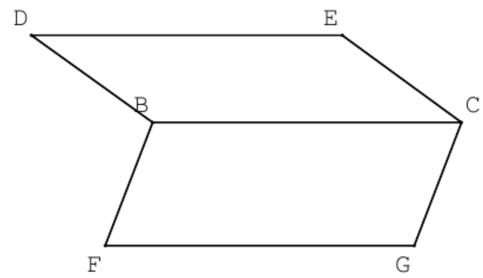
2. Avec trois cordes parallèles d'un cercle :



3. Avec trois triangles équilatéraux :



4. Avec de nouveau deux parallélogrammes BCED et BCGF :



Définition 1. Une isométrie est une transformation géométrique qui conserve les distances.

THÉORÈME 1. Les isométries du plan sont :
- Les translations,
- Les symétries axiales,
- Les rotations,
- Les successions (composées) de deux d'entre elles.

Fiche sur les isométries vues au collège. Exercices 9 à 11.

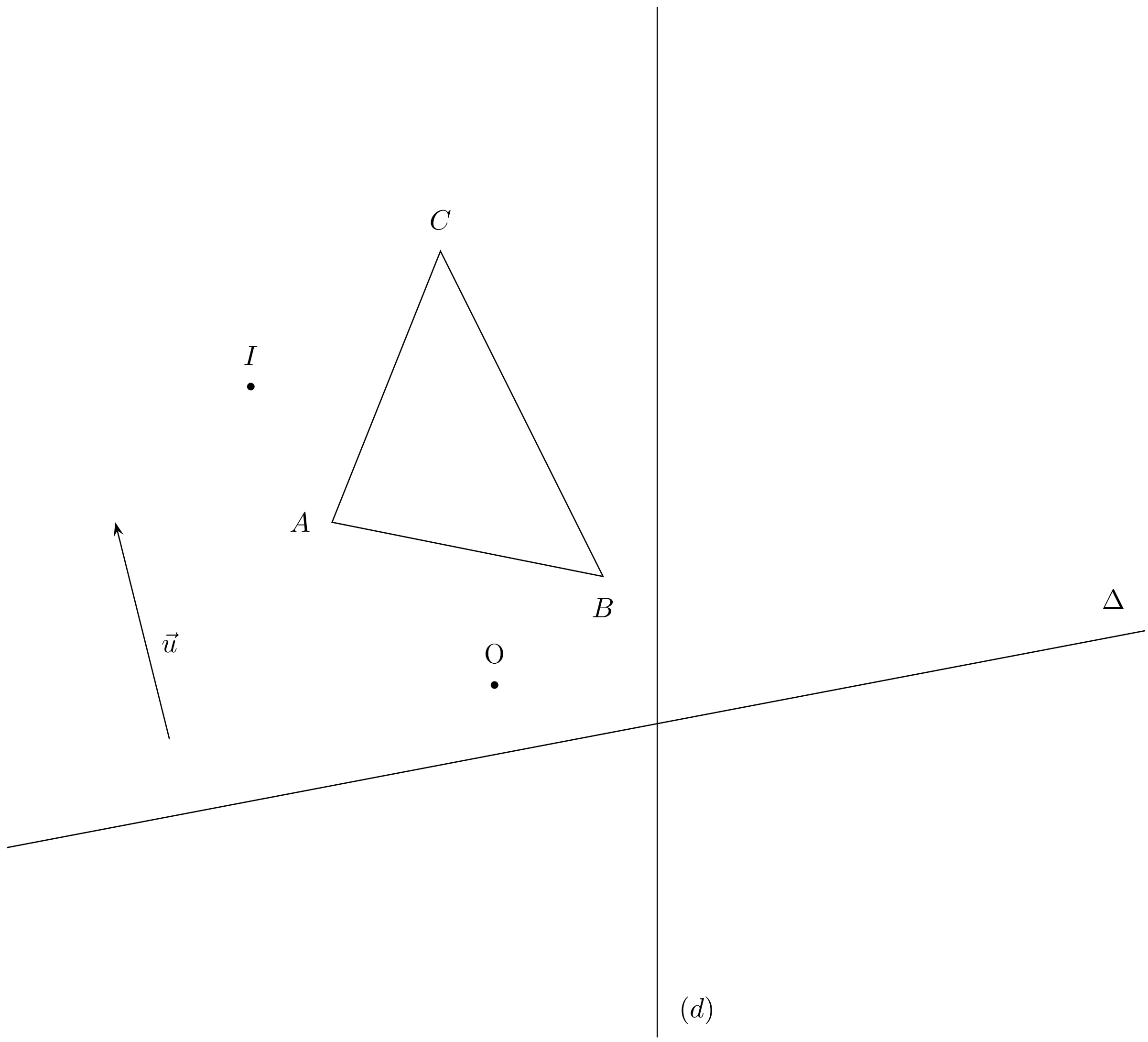
Remarques :
- Une symétrie centrale n'est qu'une rotation particulière d'angle 180°
- La composée d'une symétrie axiale et d'une translation s'appelle symétrie glissée.
- Une succession de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
- La composée de deux symétries centrales est une translation.
- La succession de deux symétries axiales donne une translation quand les axes sont parallèles, une rotation sinon.
- La composée de deux rotations de deux centres différents est une translation si la somme des angles vaut $2k\pi$, est une rotation sinon...

3 Triangles isométriques

3.1 Définition

Travail de l'élève : Ces activités permettent :
- D'utiliser les transformations étudiées au collège pour introduire les triangles isométriques
- De revoir la pratique de la rotation peu développée en collège
- On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non. Le professeur demandera de temps en temps cette précision, mais l'objet principal reste qu'ils soient isométriques.

Chaque fois que cela sera possible, le professeur mettra en évidence la suite d'applications connues qui transforme un triangle en l'autre. On privilégiera la cette série d'activités (plus longue que celle de l'inspecteur en annexe mais plus adaptée pour cette organisation du cours).



Construire à l'aide de la règle, du rapporteur et du crayon de bois, l'image du triangle :

1. ABC par la symétrie de centre I. On notera A_1, B_1 et C_1 les images respectives de A, B et C.
2. ABC par la symétrie d'axe (d). On notera A_2, B_2 et C_2 les images respectives de A, B et C.
3. ABC par la rotation de centre O, d'angle 120° dans le sens positif (ou direct). On notera A_3, B_3 et C_3 les images respectives de A, B et C.
4. $A_2B_2C_2$ par la réflexion d'axe Δ. On notera A_4, B_4 et C_4 les images respectives de A_2, B_2 et C_2.
5. ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$. On notera A_5, B_5 et C_5 les images resp. de A, B et C.
6. $A_5B_5C_5$ par la rotation de centre O, d'angle 90° dans le sens négatif (ou indirect). On notera A_6, B_6 et C_6 les images respectives de A, B et C.

Décalquer le triangle ABC. Comparer le alors aux autres triangles. Que remarque-t-on ? Peut-on d'e-gager deux sortes de triangles ?

Définition 2. Deux triangles sont dits isométriques lorsque l'un est l'image de l'autre par une isométrie, c'est-à dire par une symétrie axiale, une translation, une rotation ou une succession de telles transformations.

Propriété 1. Si deux triangles sont isométriques alors :
- Leurs trois côtés sont respectivement de la même longueur,
- Leurs trois angles sont respectivement égaux,
- Ils ont la même aire.

Preuve : Les isométries conservent les longueurs et les angles.

Remarque : Si deux triangles sont isométriques, alors ils sont superposables.

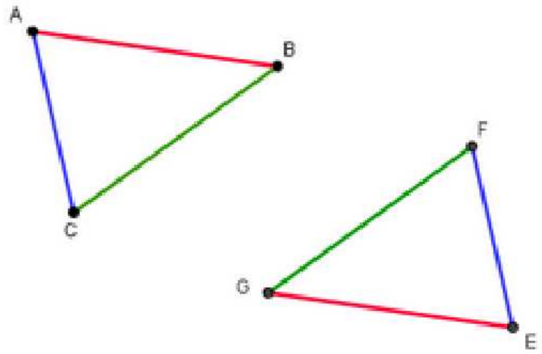
3.2 Les critères

Travail de l'élève : Construire dans chacun des cas, à l'aide de la règle, du rapporteur et du crayon de bois, un triangle ABC en respectant les données. Combien y en a-t-il dans chacun des cas ? Comment sont-ils ?

1. $BC = 5$ cm ; $AC = 3$ cm et $BA = 6$ cm
2. $BC = 4$ cm ; $\widehat{BCA} = 60°$ et $BA = 3$ cm
3. $BC = 3$ cm ; $\widehat{BCA} = 60°$ et $\widehat{CBA} = 50°$
4. $\widehat{BCA} = 45°$; $\widehat{CBA} = 90°$ et $\widehat{CAB} = 45°$
5. $BA = 4$ cm ; $\widehat{CBA} = 30°$ et $\widehat{BCA} = 50°$
6. $BC = 4$ cm ; $\widehat{CBA} = 30°$ et $BA = 3$ cm

<u>Premier critère</u> :

Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement de même longueur alors ils sont isométriques (directement ou non).



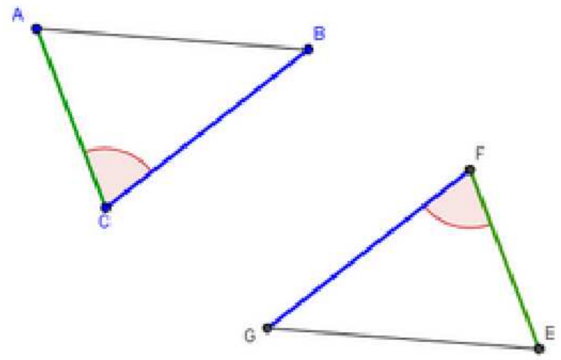
$$\begin{cases} AB = GE \\ AC = FE \\ BC = FG \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont leurs angles respectivement égaux et la même aire.

<u>Deuxième critère</u> :

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur alors ils sont isométriques (directement ou non).



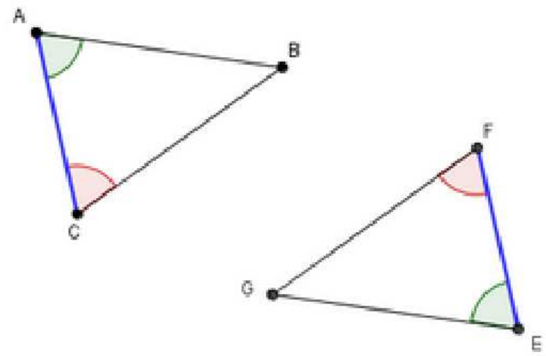
$$\begin{cases} \widehat{ACB} = \widehat{GFE} \\ AC = FE \\ BC = FG \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont leurs angles et leurs côtés respectivement égaux, et la même aire.

<u>Troisième critère</u> :

Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même mesure alors ils sont isométriques.



$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{GEF} \\ \widehat{ACB} = \widehat{GFE} \\ AC = FE \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont leurs angles et leurs côtés respectivement égaux, et la même aire.

Exercice 3.1. ABC est un triangle, D, E et F sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrer que les triangles ADE, DEF, CEF et BDF sont isométriques.
2. Par quelle transformation le triangle ADE a-t-il pour image le triangle BDF ? le triangle EFC ? le triangle DEF ?

Exercice 3.2. On considère un triangle ABC isocèle en A. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A. Justifier que les triangles ABH et ACH sont isométriques.

Exercice 3.3. Soient deux triangles ABC et RST tels que $AB = RS$, $AC = RT$ et $\hat{C} = \hat{T}$. Sont-ils isométriques ?

Exercice 3.4. Deux triangles rectangles ont les côtés de l'angle droit repsectivement égaux. Sont-ils isométriques ? Illustrer

Exercice 3.5. Difficile
Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACGF$.

1. Démontrer que les triangles ACE et AFB sont isométriques.
2. En déduire que $CE = FB$
3. Soit H le point du plan définie par $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE}$
   (a) Établir que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FAE}$ son supplémentaires.
   (b) En déduire l'égalit{e angulaire $widehatBAC = \widehat{AFH}$.
   (c) Démontrer que les triangles ABC et FAH sont isométriques.
   (d) En déduire que $BC = AH$.

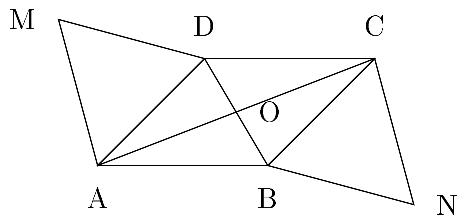
Exercice 3.6. Peut-on dire que deux triangles qui ont un côté égal et deux angles égaux sont isométriques ? Illustrer.

Exercice 3.7. Difficile
Soient un triangle isocèle ABC de sommet principal A, un point M de $[AB]$ et un point N de $[CA]$ tels que $AM = CN$. La médiatrice de $[CA]$ et celle de $[MN]$ se coupent en O.

1. Montrer que les triangles OAM et OCN sont isométriques.
2. Montrer que (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. En déduire que O est un point fixe (inépendant de la position des points M et N).
4. Que représente le point O pour le triangle ABC ?
5. Soit P le point de $[AC]$ tel que $AP = AM$
   (a) Montrer que les triangles OAM et OAP sont symétriques par rapport à la droite (OA).
   (b) Déterminer une transformation qui associe le triangle OAP au triangle OCN.
   (c) Comment passe-t-on alors du triangle OAM au triangle OCN ? Justifier.

<u>Exercice</u> 3.8. Bien (en cours)
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Soient les triangles AMD et BNC, extérieurs à $ABCD$ et équilatéraux.

1. Démontrer que les triangles OCN et OAM sont isométriques.
2. Par quelle transformation letriangle OCN a-t-il pour image le triangle OAM ?
3. Que peut-on en déduire pour les points M, O et N ?



<u>Exercice</u> 3.9. Pas mal (en cours)
$ABCD$ est un rectangle, E est le point d'intersection des bissectrices de $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$, G est le point d'intersection des bissectrices de $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$. Les droites (AE) et (DG) se coupent en H, les droites (BE)et (CG) se coupent en F.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Démontrer que les triangles ABE et DGC sont isométriques.
3. Par quelle transformation le triangle ABE a-t-il pour image le triangle DGC ?
4. Démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

<u>Exercice</u> 3.10. Difficile
ABC est un triangle isocèle en A. Le point M appartient au côté $[BC]$. Le point I est le point de $[AB]$ tel que les segments $[MI]$ et $[AB]$ soient perpendiculaires. Le point J est le point de $[AC]$ tel que les segments $[MJ]$ et $[AC]$ soient perpendiculaires.

1. Faire une figure.
2. Tracer la hauteur $[CH]$ du triangle ABC, puis le point K tel que le quadrilatère $MIHK$ soit un rectangle.
3. Démontrer que les triangles CMJ et CMK sont isométriques, puis $MJ + MI$ ne dépend pas de la position du point M sur le côté $[BC]$.

4 Triangles semblables

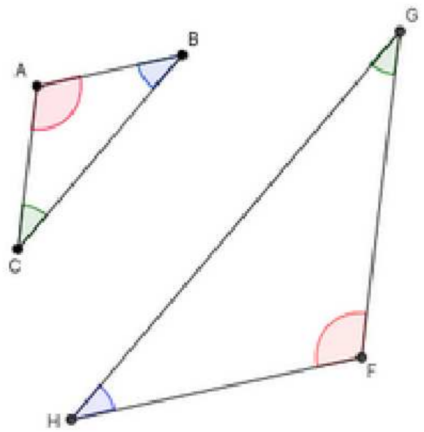
4.1 Définition

- Les activités prennent appui sur le théorème de Thalès, les agrandissements, les réductions et les triangles isométriques. item Le professeur pourra éventuellement donner dans certains cas, des mesures d'angles et ou de côtés.
- Les élèves connaissent les agrandissement et les réductions ainsi que les conséquences sur les aires (et les volumes s'il s'agit de solide)

Travail de l'élève : Soit ABC un triangle et D un point de la demi-droite $[AB)$. La parallèles à la droite (BC) passant par D coupe la droite (AC) en E.

1. Que peut-on dire des angles des triangles ADE et ABC ?
2. Que peut-on dire de leurs côtés ?
3. Constiter un tableau de proportionnalité avec les côtés.
   On dit que les triangles ADE et ABC sont semblables. Ce qui signifie que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.
4. Soit F un point de la demi-droite $[AB)$ et tel que $AF = AE$. et soit H le point de $[AC)$ tel que $AH = AD$.
   (a) Justifier que les triangles ADE et AHF sont isométriques.
   (b) En déduire que les triangles AFH et ABC sont semblables.

Définition :
Deux triangles qui ont les angles respectivement égaux et les côtés proportionnels sont appelés des triangles semblables.

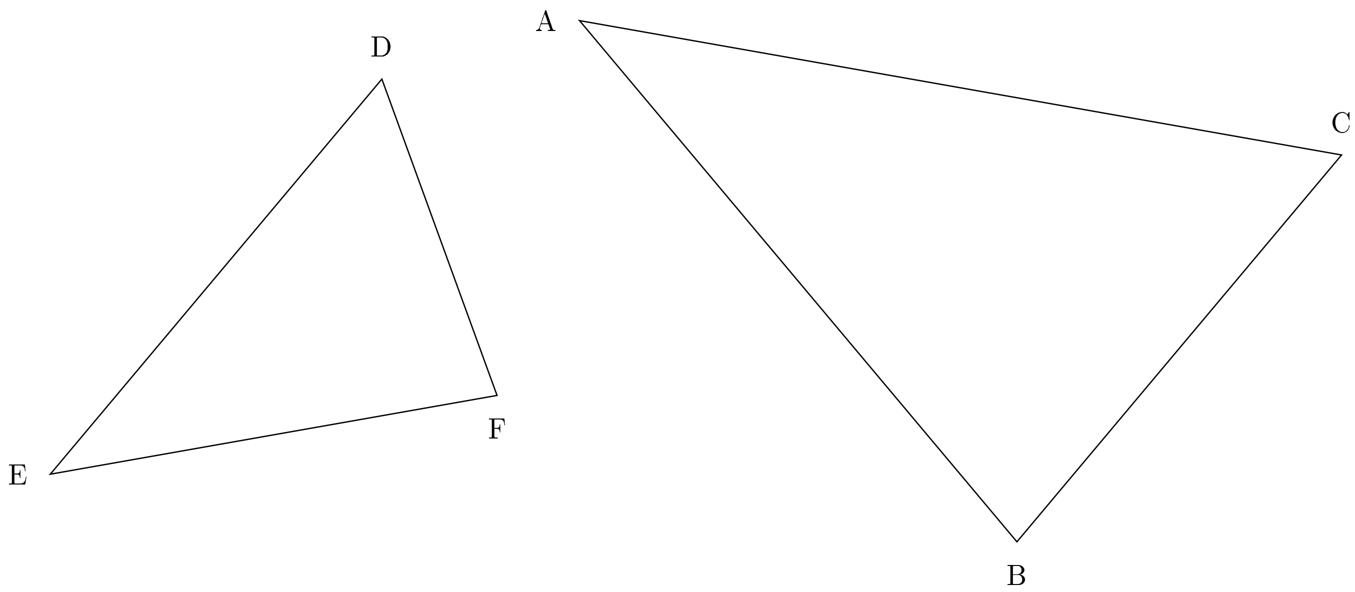


$$\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{FHG} \\ \widehat{BAC} = \widehat{HFG} \\ \widehat{ACB} = \widehat{HGF} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont semblables.}$$

Remarques :
- Ceci signifie que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.
- Des triangles isométriques sont semblables mais des triangles semblables ne sont pas forcément isométriques.

4.2 Critères

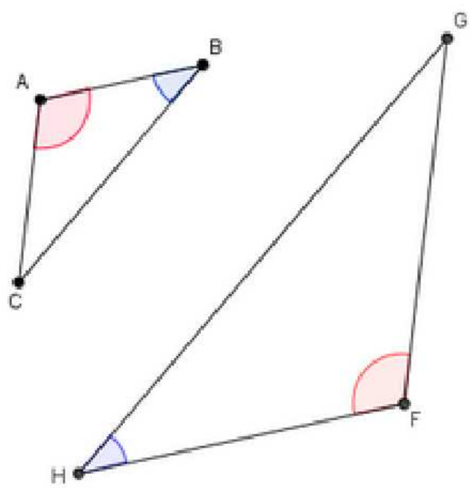
Travail de l'élève : Dans cette activité, on montre que l'égalité des angles suffit.



On donne deux triangles ABC et DEF tels que $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$ et $\hat{C} = \hat{D}$
Sur la demi-droite $[AB)$, on place F' tel que $AF' = EF$.
Sur la demi-droite $[AC)$, on place D' tel que $AD' = ED$.

1. Justifier que les triangles $AF'D'$ et EFD sont isométriques
2. Montrer que les droites (BC) et $(F'D')$ sont parallèles. En déduire que les triangles ABC et $AF'D'$ sont semblables.
3. Conclure que les triangles ABC et DEF sont semblables.
4. Peut-on arriver à la même conclusion si deux angles sont respectivement égaux ?

Théorème :
Si deux triangles ont leurs angles respectivement égaux alors ils sont semblables.

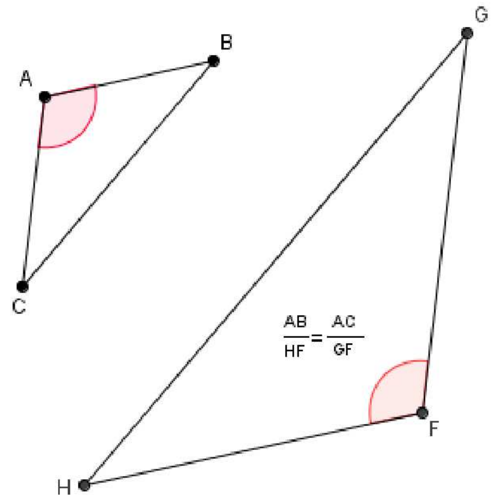


$$\begin{cases} \widehat{CAB} = \widehat{GFH} \\ \widehat{ABC} = \widehat{GHF} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont semblables.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont leurs trois côtés proportionnels.
- Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit de démontrer qu'ils ont respectivement deux angles égaux.

Théorème :
Si deux triangles ont un angle de même mesure et le rapport des deux côtés adjacents à cet angle égal au rapport des côtés homologues alors ils sont semblables.

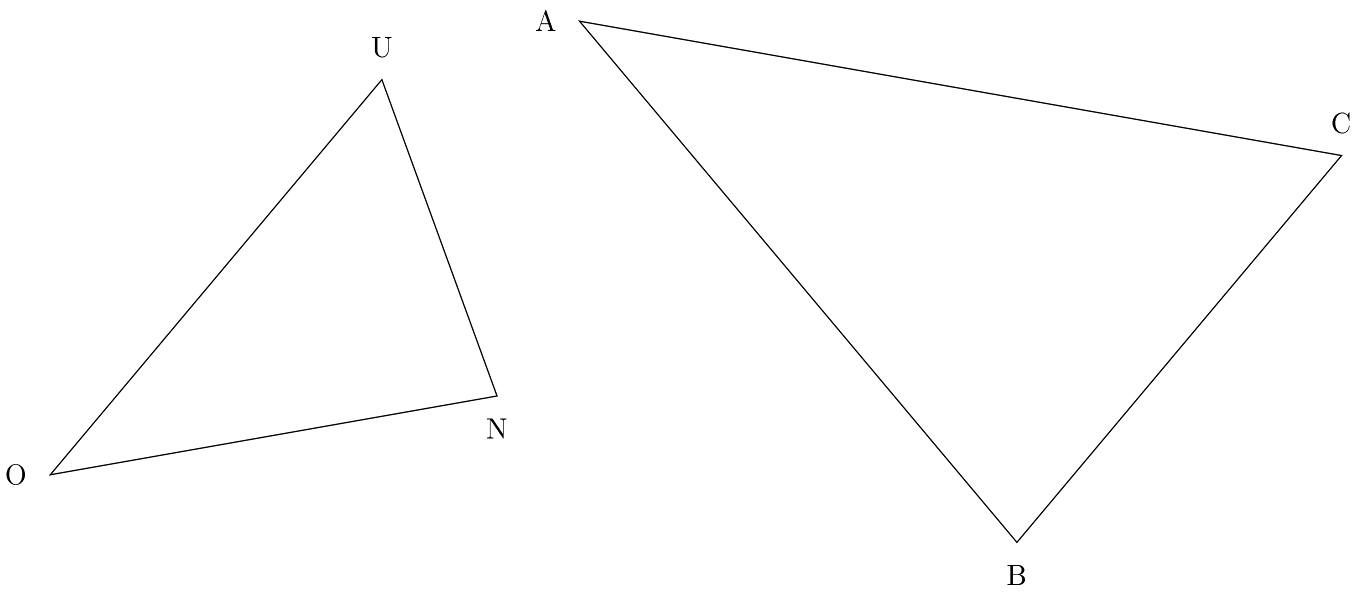


$$\begin{cases} \widehat{CAB} = \widehat{HFG} \\ \frac{AB}{HF} = \frac{AC}{GF} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont semblables.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont leurs trois côtés proportionnels et leurs trois angles égaux.

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Maintenant on examine le cas où les côtés sont respectivement proportionnels.



On donne ABC et ONU deux triangles dont les côtés sont proportionnels, c'est-à-dire que le tableau

AB	AC	BC
ON	OU	NU

est un tableau de proportionnalité.

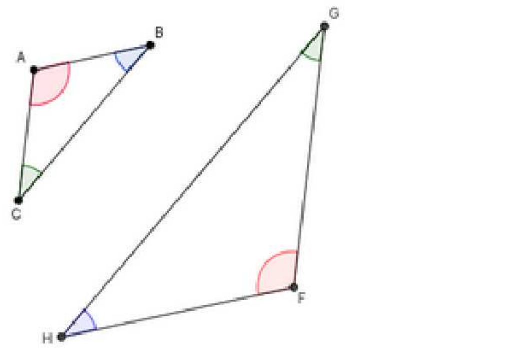
1. Dans chaque triangle repérer les angles opposés à chaque côté figurant dans le tableau et les associer dans un nouveau tableau.
2. Placer sur la demi-droite $[AC)$ le point U' tel que $AU' = OU$
3. Placer sur la demi-droite $[AB)$ le point N' tel que $AN' = ON$

4. Montrer que les droites (BC) et $(N'U')$ sont parallèles.
5. Jsutifier ques les triangles ABC et $AN'U'$ sont semblables
6. En déduire que $N'U' = NU$ puis établir que les triangles ABC et ONU sont semblables.

Théorème :
Si deux triangles ont des côtés proportionnels alors ils sont semblables.

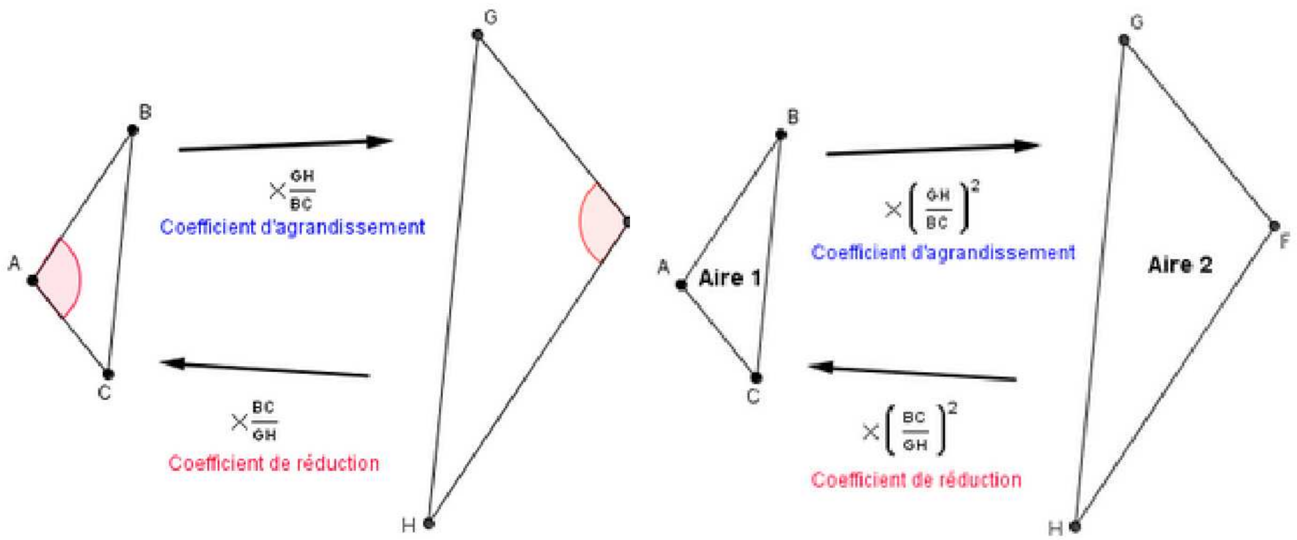
Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont leurs trois angles égaux.



ABC et EFG sont semblables alors $\frac{AB}{HF} = \frac{AC}{GF} = \frac{BC}{HG}$ ou $\frac{HF}{AB} = \frac{GF}{AC} = \frac{HG}{BC}$

4.3 Conséquences



Exercice 4.1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables tels que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$. On sait que $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $A'B' = 17.5$ cm. Calculer les distances $A'C'$ et $C'B'$.

Exercice 4.2. ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $\hat{A} = 36°$ et $\hat{B} = 72°$.
La bissectrice de $\widehat{BCA}$ coupe le segment $[AB]$ en D.
Montrer que les triangles BCD et ABC sont semblables.

Exercice 4.3. Soit deux triangles ABC et MNP. On donne $BC = 10.8$ cm, $\hat{A} = 72°$, $\hat{B} = 63°$, $\hat{M} = 45°$ et $\hat{N} = 72°$.

1. Montrer que les triangles ABC et MNP sont semblables.
2. On donne de plus $AB = 8$ cm et $MP = 6.48$ cm. Calculer NP.

Exercice 4.4. $ABCD$ un parallèlogramme, N un point du segment $[DC]$ distonct de D. La droite (AN) coupe (BC) en M.

1. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
2. En déduire que $DN \times BM = AB \times AD$

Exercice 4.5. Dans un repère orthonormé, on donne les points suivants : $A(-4; 0)$, $B(3; 11)$, $C(6; 6)$, $E(0; -5)$, $F(1; -4)$ et $G(3; -6)$.

1. Démontrer que les triangles ABC et EFG sont semblables.
2. Calculer l'aire de ABC
3. Calculer de deux façons différentes l'aire de EFG.

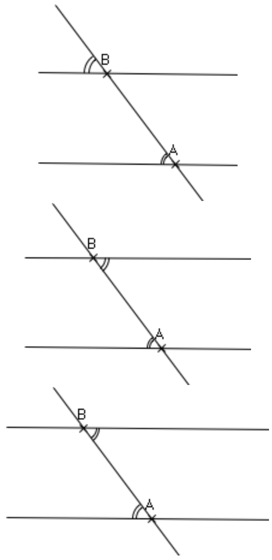
Les Annexes

Quelques rappels sur les angles

1. Angles et parallèles

Théorèmes : Soit une droite Δ coupant deux autres droites d_1 et d_2, on a

- $d_1 // d_2$ si et seulement si les angles correspondants sont égaux,
- $d_1 // d_2$ si et seulement si les angles alternes-internes sont égaux,
- $d_1 // d_2$ si et seulement si les angles alternes-externes sont égaux.



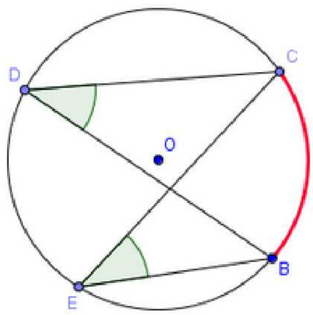
Utilisations :

- Montrer que deux angles sont égaux,
- Montrer que deux droites sont parallèles.

2. Angles inscrits dans un cercles

Théorème :
Si deux angles inscrits sur un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Utilisation : Montrer que deux angles sont égaux.

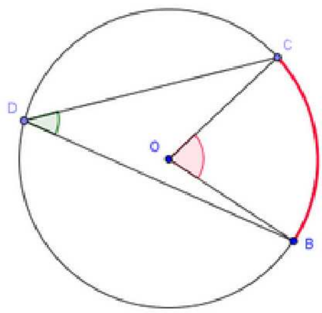


$\widehat{CDB} = \widehat{CEB}$

3. Angle inscrit et angle au centre

Théorème :
Si un angle inscrit intercepte le même arc qu'un angle au centre, alors sa mesure est la moitié de celle de celui-ci.

Utilisation : Montrer qu'un angle est le double de l'autre.

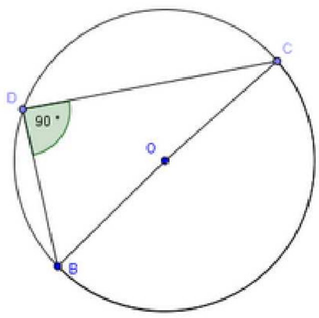


$\widehat{CDB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$

4. Triangle inscrit dans un demi-cercle

Théorème :
Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors il est rectangle et réciproquement.

Utilisation : Montrer qu'un angle est droit.

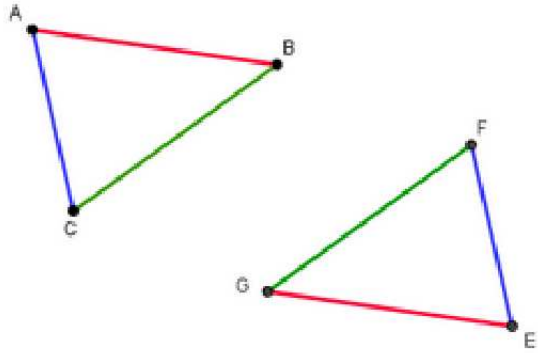


DBC est rectangle en D.

3.1 Les critères

Premier critère :

Si deux triangles ont leurs trois ....
....
....
alors ils sont isométriques (directement ou non).



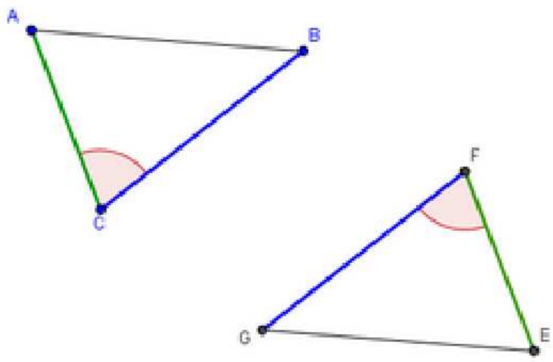
Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont ....
  ....
  ....

$$\begin{cases} AB = GE \\ AC = FE \\ BC = FG \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques.}$$

Deuxième critère :

Si deux triangles ont .... de même mesure **COMPRIS** entre .... respectivement de même longueur alors ils sont isométriques (directement ou non).



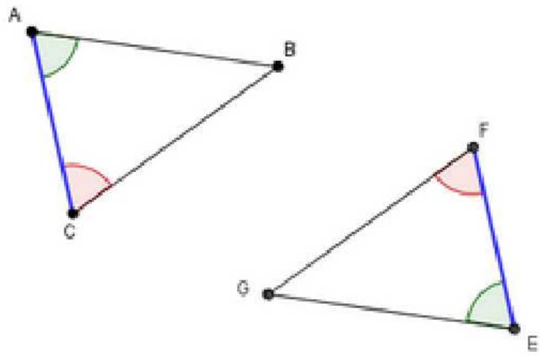
Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont ....
  ....
  ....

$$\begin{cases} \widehat{ACB} = \widehat{GFE} \\ AC = FE \\ BC = FG \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques.}$$

Troisième critère :

Si deux triangles ont .... de même longueur **ADJACENT** à .... respectivement de même mesure alors ils sont isométriques.



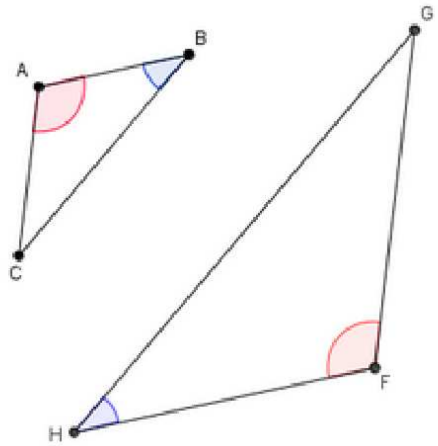
Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont ....
  ....
  ....

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{GEF} \\ \widehat{ACB} = \widehat{GFE} \\ AC = FE \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques.}$$

4.2 Critères

Théorème :
Si deux triangles ont leurs trois ....
....
....
alors ils sont semblables.

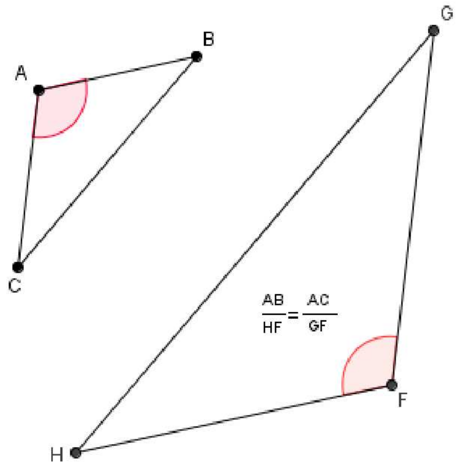


$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{CAB}=\widehat{GFH}\\ \widehat{ABC}=\widehat{GHF}\end{array}\right. \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont semblables.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont ....
  ....
- Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit de démontrer qu'ils ont respectivement .... angles égaux.

Théorème :
Si deux triangles ont .... de même mesure et le .... des deux côtés **ADJACENTS** à cet angle égal au .... des côtés homologues alors ils sont semblables.

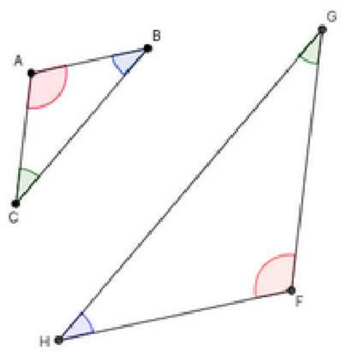


$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{CAB}=\widehat{HFG}\\ \dfrac{AB}{HF}=\dfrac{AC}{GF}\end{array}\right. \Leftrightarrow ABC \text{ et } EFG \text{ sont semblables.}$$

Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont ....
  ....
  ....

Théorème :
Si deux triangles ont ....
alors ils sont semblables.

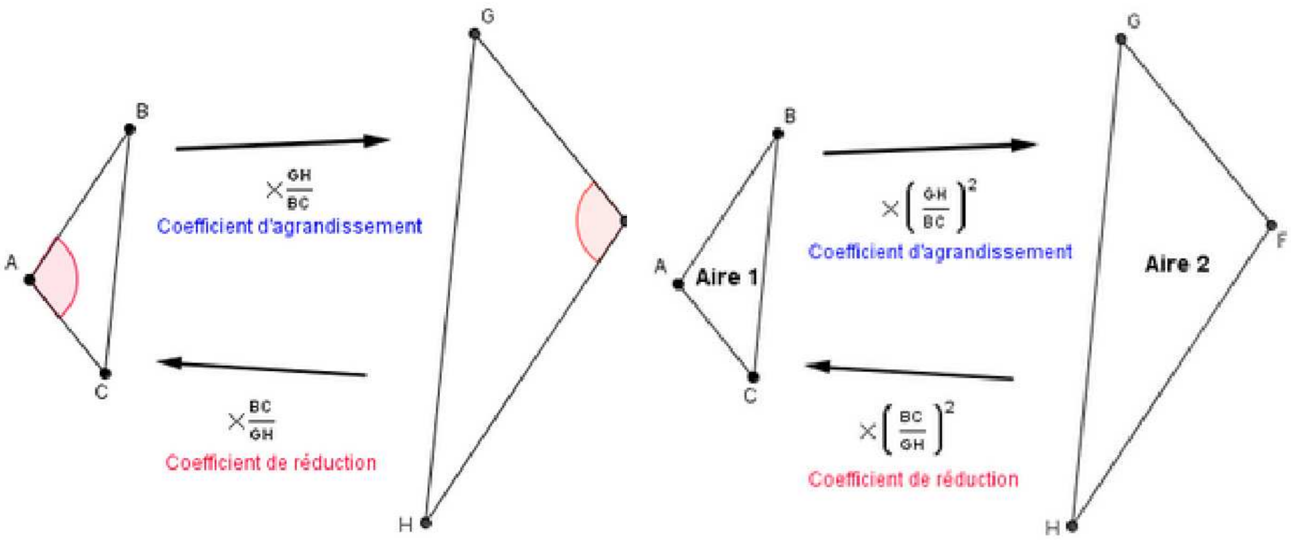


ABC et EFG sont semblables alors $\dfrac{AB}{HF}=\dfrac{AC}{GF}=\dfrac{BC}{HG}$ ou $\dfrac{HF}{AB}=\dfrac{GF}{AC}=\dfrac{HG}{BC}$

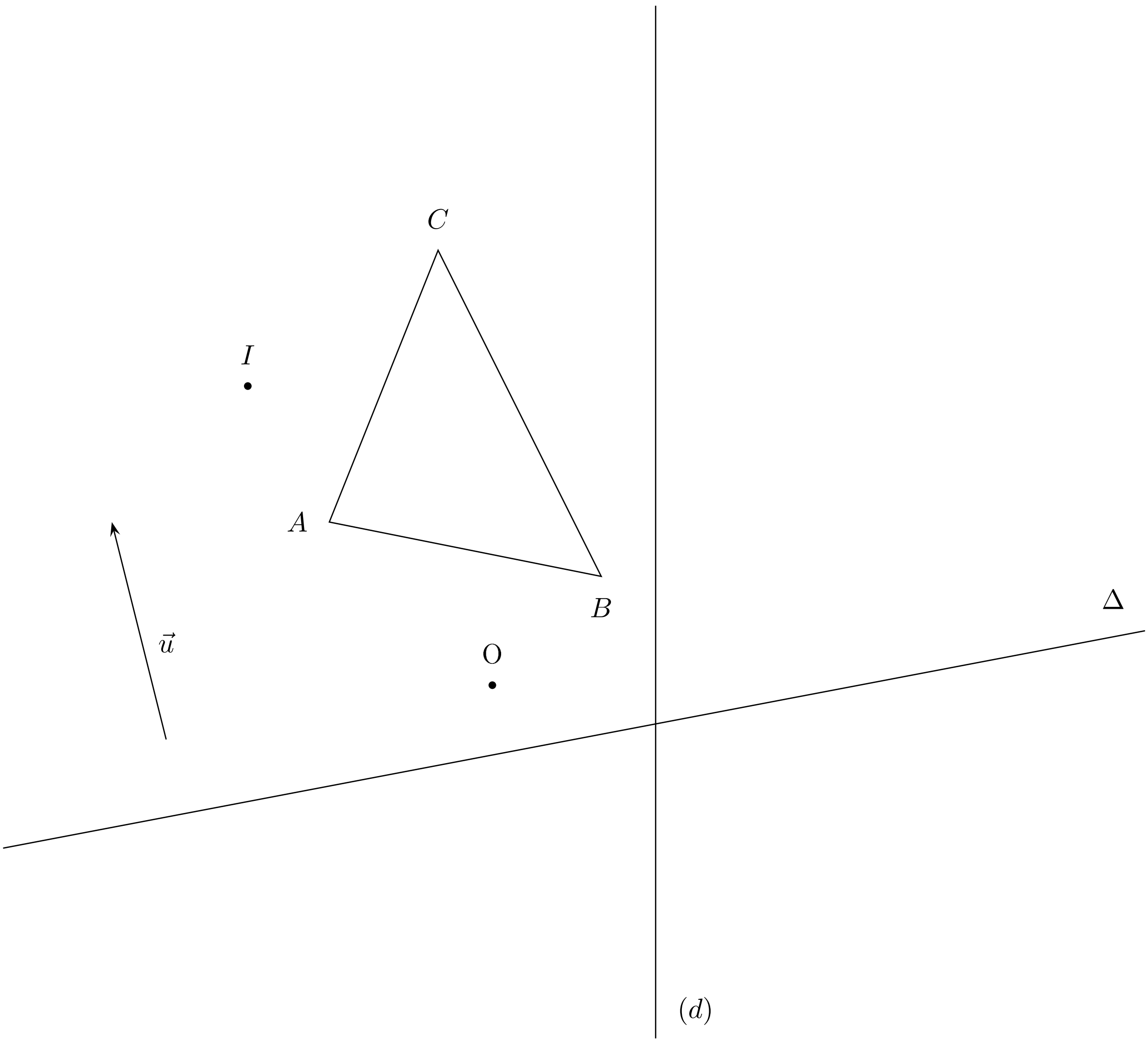
Remarques :

- Il s'agit d'une équivalence.
- En conséquence, ces triangles ont ....
  ....

4.3 Conséquences



Triangles isométriques



Construire à l'aide de la règle, du rapporteur et du crayon de bois, l'image du triangle :

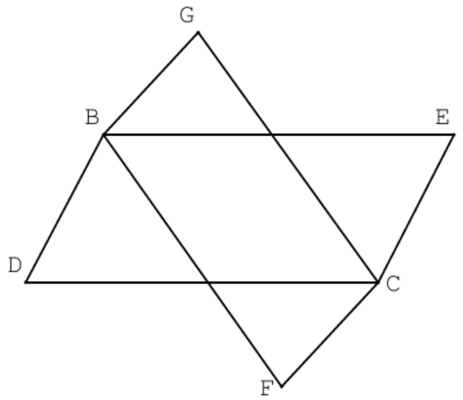
1. ABC par la symétrie de centre I. On notera A_1, B_1 et C_1 les images respectives de A, B et C.
2. ABC par la symétrie d'axe (d). On notera A_2, B_2 et C_2 les images respectives de A, B et C.
3. ABC par la rotation de centre O, d'angle 120° dans le sens positif (ou direct). On notera A_3, B_3 et C_3 les images respectives de A, B et C.
4. $A_2B_2C_2$ par la réflexion d'axe Δ. On notera A_4, B_4 et C_4 les images respectives de A_2, B_2 et C_2.
5. ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$. On notera A_5, B_5 et C_5 les images resp. de A, B et C.
6. $A_5B_5C_5$ par la rotation de centre O, d'angle 90° dans le sens négatif (ou indirect). On notera A_6, B_6 et C_6 les images respectives de A, B et C.

Décalquer le triangle ABC. Comparer le alors aux autres triangles. Que remarque-t-on ? Peut-on d'e-gager deux sortes de triangles ?

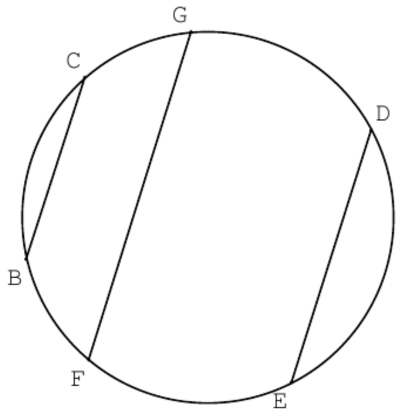
Les isométries

Dans chacun des cas suivants, trouver une transformation qui amène B sur C, D sur E et F sur G.

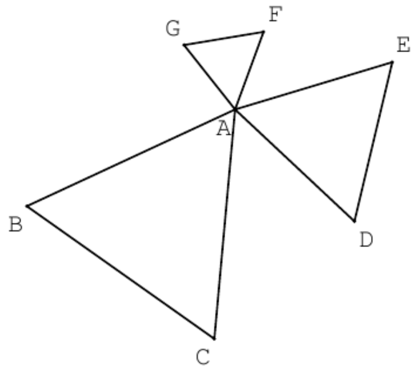
1. Avec deux parallélogrammes BDCE et BFCG :



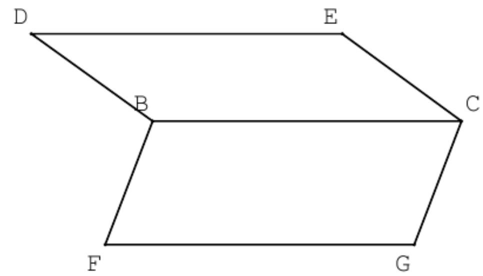
2. Avec trois cordes parallèles d'un cercle :



3. Avec trois triangles équilatéraux :



4. Avec de nouveau deux parallélogrammes BCED et BCGF :



Critères d'isométrie

Construire dans chacun des cas, à l'aide de la règle, du rapporteur et du crayon de bois, un triangle ABC en respectant les données. Combien y en a-t-il dans chacun des cas ? Comment sont-ils ?

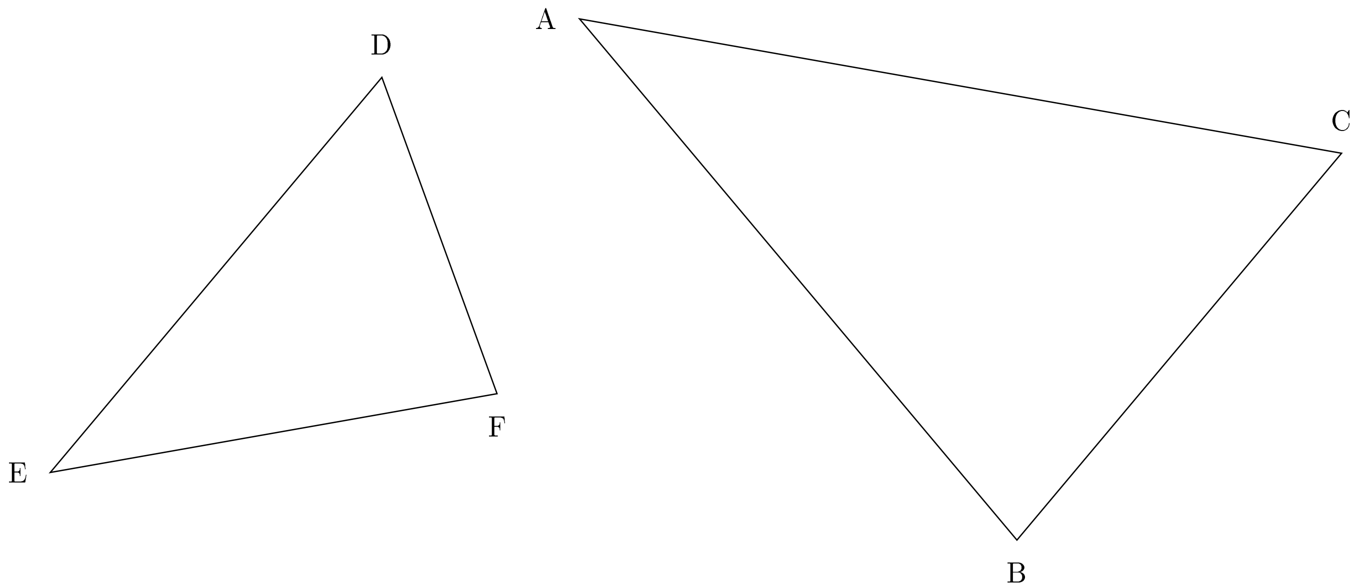
1. $BC = 5$ cm ; $AC = 3$ cm et $BA = 6$ cm
2. $BC = 4$ cm ; $\widehat{BCA} = 60°$ et $BA = 3$ cm
3. $BC = 3$ cm ; $\widehat{BCA} = 60°$ et $\widehat{CBA} = 50°$
4. $\widehat{BCA} = 45°$; $\widehat{CBA} = 90°$ et $\widehat{CAB} = 45°$
5. $BA = 4$ cm ; $\widehat{CBA} = 30°$ et $\widehat{BCA} = 50°$
6. $BC = 4$ cm ; $\widehat{CBA} = 30°$ et $BA = 3$ cm

Découverte

Soit ABC un triangle et D un point de la demi-droite $[AB)$. La parallèles à la droite (BC) passant par D coupe la droite (AC) en E.

1. Que peut-on dire des angles des triangles ADE et ABC ?
2. Que peut-on dire de leurs côtés ?
3. Constiter un tableau de proportionnalité avec les côtés.
   On dit que les triangles ADE et ABC sont semblables. Ce qui signifie que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.
4. Soit F un point de la demi-droite $[AB)$ et tel que $AF = AE$. et soit H le point de $[AC)$ tel que $AH = AD$.
   (a) Justifier que les triangles ADE et AHF sont isométriques.
   (b) En déduire que les triangles AFH et ABC sont semblables.

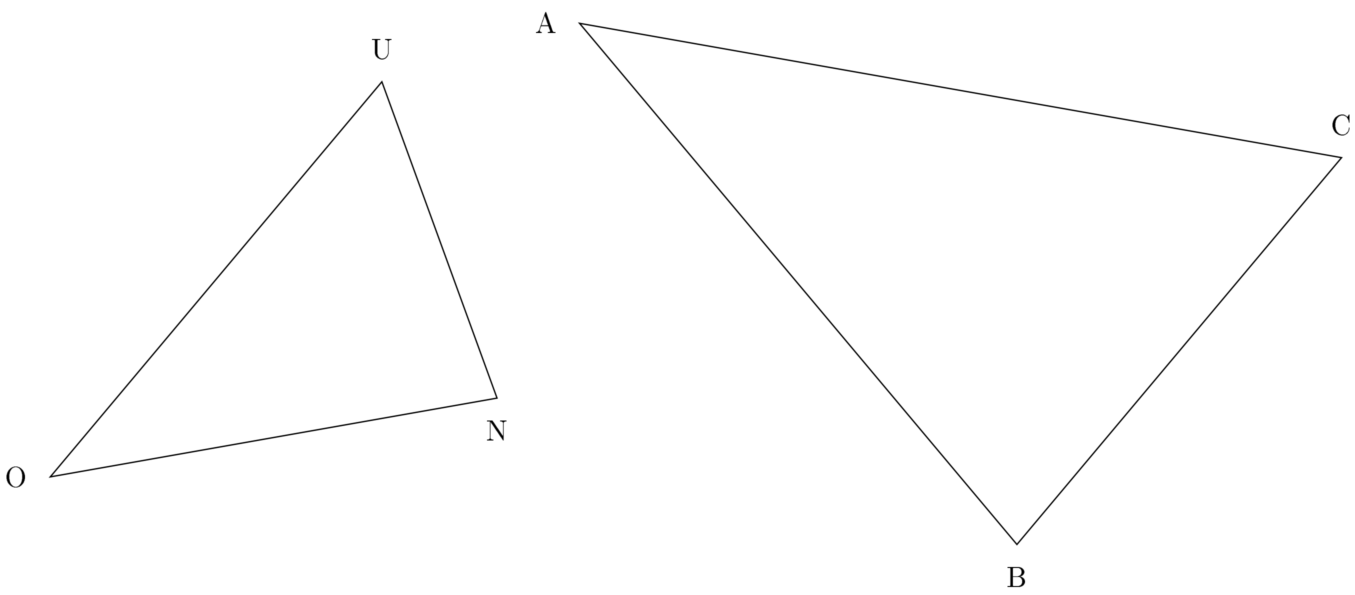
Critères sur les angles



On donne deux triangles ABC et DEF tels que $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$ et $\hat{C} = \hat{D}$
Sur la demi-droite $[AB)$, on place F' tel que $AF' = EF$.
Sur la demi-droite $[AC)$, on place D' tel que $AD' = ED$.

1. Justifier que les triangles $AF'D'$ et EFD sont isométriques
2. Montrer que les droites (BC) et $(F'D')$ sont parallèles. En déduire que les triangles ABC et $AF'D'$ sont semblables.
3. Conclure que les triangles ABC et DEF sont semblables.
4. Peut-on arriver à la même conclusion si deux angles sont respectivement égaux ?

Critères sur les côtés



On donne ABC et ONU deux triangles dont les côtés sont proportionnels, c'est-à-dire que le tableau

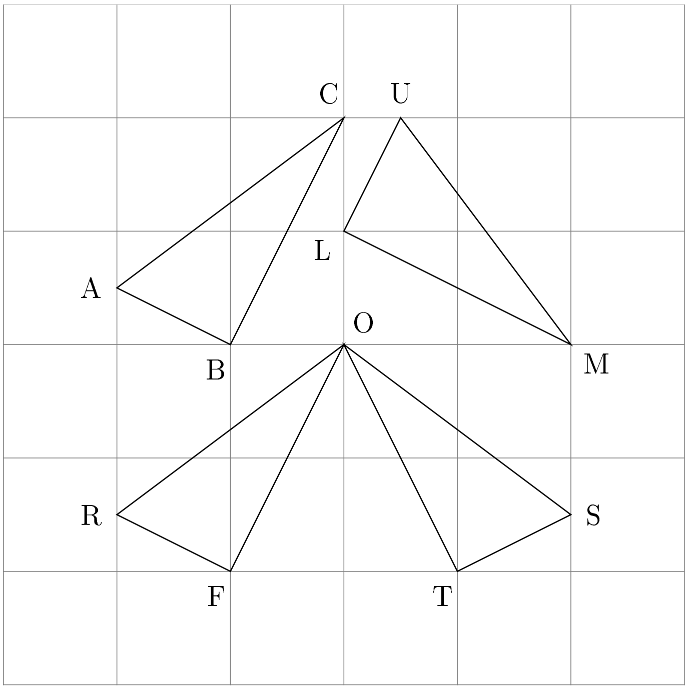
AB	AC	BC
ON	OU	NU

est un tableau de proportionnalité.

1. Dans chaque triangle repérer les angles opposés à chaque côté figurant dans le tableau et les associer dans un nouveau tableau.
2. Placer sur la demi-droite $[AC)$ le point U' tel que $AU' = OU$
3. Placer sur la demi-droite $[AB)$ le point N' tel que $AN' = ON$
4. Montrer que les droites (BC) et $(N'U')$ sont parallèles.
5. Jsutifier ques les triangles ABC et $AN'U'$ sont semblables
6. En déduire que $N'U' = NU$ puis établir que les triangles ABC et ONU sont semblables.

Activite supplémentaires

Activité 1 :



1. (a) Quelle remarque immédiate pouvez-vous faire sur ces triangles ?
   (b) Si vous découpiez ces triangles, pourriez-vous les superposer de manière à ce que le quadrillage soit toujours tourné vers vous ?
2. (a) Comment passe-t-on du triangle ABC au triangle RFO ?
   (b) Quelles égalités métriques et angulaires peut-on en déduire ?
3. Les triangles RFO et OST sont-ils images l'un de l'autre par une isométrie ? Si oui, laquelle.
4. Que peut-on en déduire pour les triangles ABC et OST ?
5. Étudier le cas des triangles ABC et MUL.

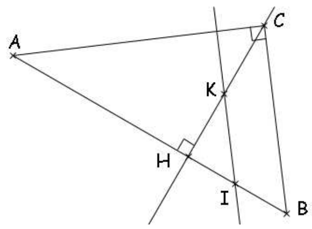
Activité 2 : Cette activité permet de mettre en place le deuxième critère d'isométrie des triangles. Selon le niveau de la classe, on admettra ou non le résultat.

1. Construire un triangle ABC.
2. Construire un triangle RST tel que $RT = AC$, $RS = AB$ et $\widehat{SRT} = \widehat{BAC}$.
3. Tracer un segment DE.
4. Combien peut-on construire de triangle DEF tel que $DE = AC$, $DS = AB$ et $\widehat{EDF} = \widehat{BAC}$?

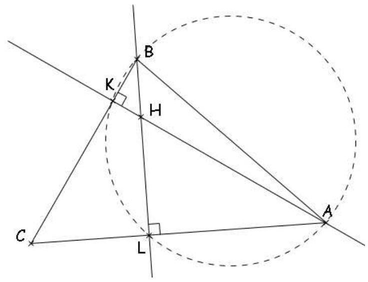
Activité 3 : Cette activité permet de mettre en place le troisième critères d'isométrie.

1. Construire un triangle ABC.
2. Construire un triangle RST tel que $RT = BC$, $\widehat{R} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{T} = \widehat{BCA}$.
3. Tracer un segment DF.
4. Combien peut-on construire de triangle DEF tel que $DF = BC$, $\widehat{D} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{F} = \widehat{BCA}$?

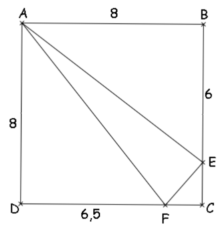
Exercice 1.1. ABC est un triangle rectangle en C. On appelle H le pied de la hauteur issue de C. Soit I un point de $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe (CH) en K.
Montrer que (AK) est perpendiculaire à (CI).



Exercice 1.2. ABC est un triangle d'orthocentre H. La hauteur (AH) coupe (BC) en K et la hauteur (BH) cooupe (AC) en L.
Montrer que les points A, L, K et B sont cocycliques, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même cercle, dont on préciser le diamètre.

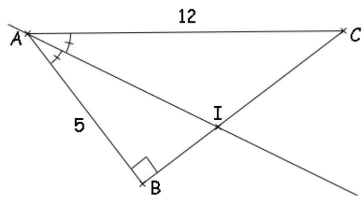


Exercice 1.3. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 8. De plus, on donne $BE = 6$ et $DF = 6.5$.
Le triangle AEF est-il rectangle ?



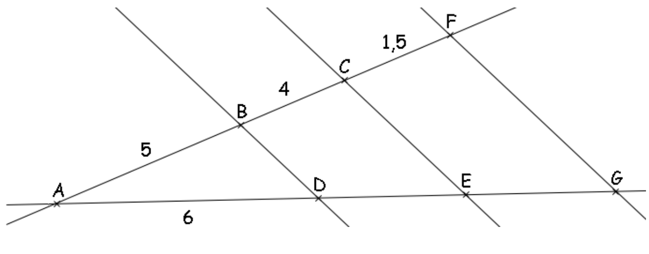
Exercice 1.4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. On place un point M sur $\mathcal{C}$, distincts de A et B. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAM}$ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en N.
Faire une figure puis montrer que la droite (ON) est parallèle à la droite (AM).

Exercice 1.5. Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 5$ et $AC = 12$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en I.
Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ et la longueur BI à 10^{-1} près.

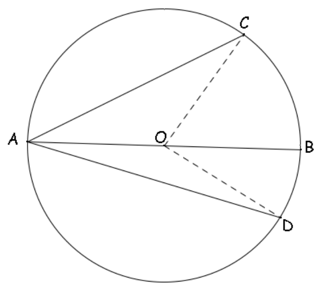


Exercice 1.6. Sur la figure ci-contre, les droites (BD) et (CE) sont parallèles. De plus, on donne $AB = 5$, $BC = 4$, $CF = 1.5$, $AD = 6$ et $AG = 12.6$.

1. Calculer DE
2. Les droites (BD) et (FG) sont-elles parallèles ?

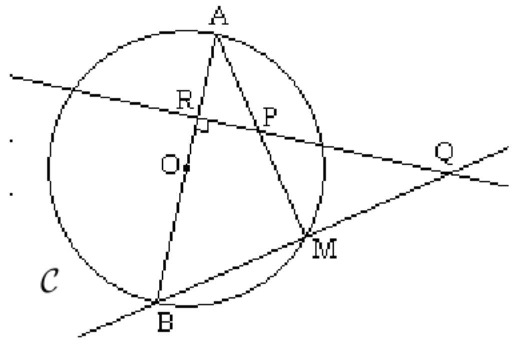


Exercice 1.7. $\mathcal{C}$ est un cercle de dimaètre $[AB]$ et de centre O. Les points C et D sont deux points du cercle $\mathcal{C}$, de part et d'autre de la droite (AB) et tel que $\widehat{BOC} = 56°$ et $\widehat{BOD} = 30°$.
Calculer les angles du triangle ACD



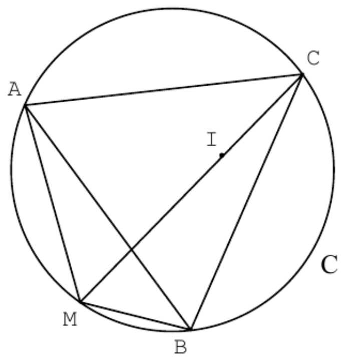
Exercice 1.8. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ et R un point de $[OA]$.
La perpendiculaire à (AB) menée par R coupe (AM) en P et (BM) en Q.
On note I l'intersection de (BP) et (AQ).

1. Quelle est la nature du triangle ABM.
2. Démontrer que (BP) et (AQ) sont perpendiculaires.
3. En déduire que I est un point du cercle $\mathcal{C}$.

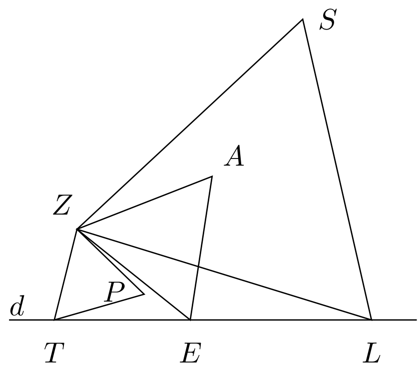


Exercice 1.9. Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Le point M est un point quelconque du petit arc AB. On considère le point I du segment $[MC]$ tel que $MI = MA$.

1. Montrer que $\widehat{AMC} = \widehat{ABC}$.
2. En déduire que le triangle MAI est équilatéral.
3. A l'aide d'une rotation à préciser, démontrer que $MB = IC$

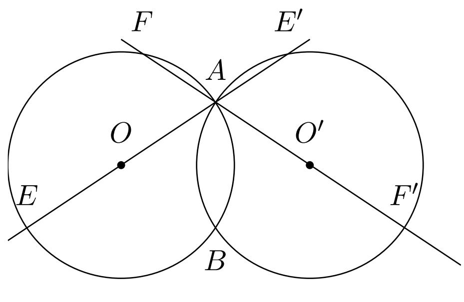


Exercice 1.10. Soient T, E et L trois points aligés d'une droite (d) et Z un point n'appartenant pas à (d).
On place les points P, A et S comme l'indique la figure et tel que TZP, EZA et LES soient des triangles équilatéraux.
Démontrer que P, A et S sont alignés.



Exercice 1.11. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de même rayon, de centres respectifs O et O' et sécants en A et B. La droite (OA) recoupe $\mathcal{C}'$ en E' et $\mathcal{C}$ en E. La droite $(O'A)$ recoupe $\mathcal{C}$ en F et $\mathcal{C}'$ en F'.

1. Démontrer que les points A, B et F' sont alignés.
2. Soit s la réflexion (symétrie orthogonale) d'axe (AB). Quelles est l'image de E par s ?
3. Démontrer que les droites $(E'F')$, (EF) et (AB) sont concourantes.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $E'F'EF$?



<u>Exercice</u> 1.12. ABC est un triangle, D, E et F sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrer que les triangles ADE, DEF, CEF et BDF sont isométriques.
2. Par quelle transformation le triangle ADE a-t-il pour image le triangle BDF ? le triangle EFC ? le triangle DEF ?

<u>Exercice</u> 1.13. On considère un triangle ABC isocèle en A. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A. Justifier que les triangles ABH et ACH sont isométriques.

<u>Exercice</u> 1.14. Soient deux triangles ABC et RST tels que $AB = RS$, $AC = RT$ et $\hat{C} = \hat{T}$. Sont-ils isométriques ?

<u>Exercice</u> 1.15. Deux triangles rectangles ont les côtés de l'angle droit repsectivement égaux. Sont-ils isométriques ? Illustrer

<u>Exercice</u> 1.16. Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACGF$.

1. Démontrer que les triangles ACE et AFB sont isométriques.
2. En déduire que $CE = FB$
3. Soit H le point du plan définie par $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE}$
   (a) Établir que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FAE}$ son supplémentaires.
   (b) En déduire l'égalité angulaire $\widehat{BAC} = \widehat{AFH}$.
   (c) Démontrer que les triangles ABC et FAH sont isométriques.
   (d) En déduire que $BC = AH$.

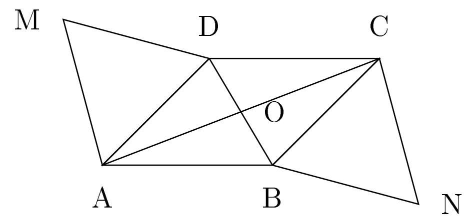
<u>Exercice</u> 1.17. Peut-on dire que deux triangles qui ont un côté égal et deux angles égaux sont isométriques ? Illustrer.

<u>Exercice</u> 1.18. Soient un triangle isocèle ABC de sommet principal A, un point M de $[AB]$ et un point N de $[CA]$ tels que $AM = CN$. La médiatrice de $[CA]$ et celle de $[MN]$ se coupent en O.

1. Montrer que les triangles OAM et OCN sont isométriques.
2. Montrer que (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. En déduire que O est un point fixe (inépendant de la position des points M et N).
4. Que représente le point O pour le triangle ABC ?
5. Soit P le point de $[AC]$ tel que $AP = AM$
   (a) Montrer que les triangles OAM et OAP sont symétriques par rapport à la droite (OA).
   (b) Déterminer une transformation qui associe le triangle OAP au triangle OCN.
   (c) Comment passe-t-on alors du triangle OAM au triangle OCN ? Justifier.

Exercice 1.19. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Soient les triangles AMD et BNC, extérieurs à $ABCD$ et équilatéraux.

1. Démontrer que les triangles OCN et OAM sont isométriques.
2. Par quelle transformation letriangle OCN a-t-il pour image le triangle OAM ?
3. Que peut-on en déduire pour les points M, O et N ?



Exercice 1.20. $ABCD$ est un rectangle, E est le point d'intersection des bissectrices de $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$, G est le point d'intersection des bissectrices de $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$. Les droites (AE) et (DG) se coupent en H, les droites (BE)et (CG) se coupent en F.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Démontrer que les triangles ABE et DGC sont isométriques.
3. Par quelle transformation le triangle ABE a-t-il pour image le triangle DGC ?
4. Démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

Exercice 1.21. ABC est un triangle isocèle en A. Le point M appartient au côté $[BC]$. Le point I est le point de $[AB]$ tel que les segments $[MI]$ et $[AB]$ soient perpendiculaires. Le point J est le point de $[AC]$ tel que les segments $[MJ]$ et $[AC]$ soient perpendiculaires.

1. Faire une figure.
2. Tracer la hauteur $[CH]$ du triangle ABC, puis le point K tel que le quadrilatère $MIHK$ soit un rectangle.
3. Démontrer que les triangles CMJ et CMK sont isométriques, puis $MJ + MI$ ne dépend pas de la position du point M sur le côté $[BC]$.

Exercice 1.22. Soit un triangle ABC rectangle isocèle A. Par le sommet A, on mène extérieurement au triangle un droite (xy), puis les perpendiculaires (BM) et (CN) à (xy), ainsi que la hauteur $[AH]$ du triangle ABC.

1. Faire une figure
2. Etablir que $\widehat{BAM} = \widehat{ACN}$.
3. Montrer alors que les triangles BAM et CNA sont isométriques.
4. En déduire que $MN = BM + CN$
5. Comparer les triangles HBM et HAN
6. Démontrer que le triangle MHN est rectangle isocèle.

Exercice 1.23. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables tels que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$. On sait que $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $A'B' = 17.5$ cm. Calculer les distances $A'C'$ et $C'B'$.

Exercice 1.24. ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $\hat{A} = 36°$ et $\hat{B} = 72°$.
La bissectrice de $\widehat{BCA}$ coupe le segment $[AB]$ en D.
Montrer que les triangles BCD et ABC sont semblables.

Exercice 1.26. Soit deux triangles ABC et MNP. On donne $BC = 10.8$ cm, $\hat{A} = 72°$, $\hat{B} = 63°$, $\hat{M} = 45°$ et $\hat{N} = 72°$.

1. Montrer que les triangles ABC et MNP sont semblables.
2. On donne de plus $AB = 8$ cm et $MP = 6.48$ cm. Calculer NP.

Exercice 1.27. $ABCD$ un parallèlogramme, N un point du segment $[DC]$ distonct de D. La droite (AN) coupe (BC) en M.

1. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
2. En déduire que $DN \times BM = AB \times AD$

Exercice 1.28. Dans un repère orthonormé, on donne les points suivants : $A(-4; 0)$, $B(3; 11)$, $C(6; 6)$, $E(0; -5)$, $F(1; -4)$ et $G(3; -6)$.

1. Démontrer que les triangles ABC et EFG sont semblables.
2. Calculer l'aire de ABC
3. Calculer de deux façons différentes l'aire de EFG.

Devoir Surveillé 5

Exercice 2.1. (6 points)
Vrai ou Faux ? **Justifier !!!!!**

1. Deux triangles ayant leurs angles égaux deux à deux sont isométriques.
2. Deux triangles ayant deux côtés et un angle de même mesure sont isométriques.
3. Deux triangles rectangles ayant la même hypoténuse sont isométriques.
4. Deux triangles rectangles ayant la même hypoténuse et un angle aigu égal sont isométriques.
5. La bissectrice d'un angle $\widehat{BAC}$ partage le triangle ABC en deux triangles isométriques.
6. Si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres d'un même cercle de centre O alors AOC et BOD sont isométriques.

Exercice 2.2. (5 points)
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Une droite passant par O coupe $[AB]$ en M et $[DC]$ en N.

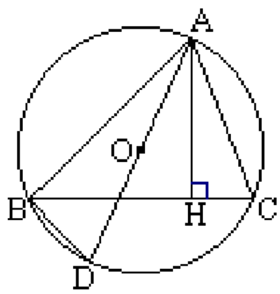
1. Montrer que les triangles OBM et ODN sont isométriques.
2. En déduire que $BM = DN$ et que O est le milieu de $[MN]$.
3. Préciser une transformation qui associe les triangles OBM et ODN.

Exercice 2.3. (5 points)
Soit ABC un triangle et E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$
3. Montrer que les triangles ABC et AEF sont semblables.
4. Déterminer le coefficient de similitude pour passer de ABC à AFE.
5. On donne que l'aire du ABC est égale à 18 cm^2. En déduire l'aire de AFE.

Exercice 2.4. (4 points)

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{BAC}$ est aigu. On appelle H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. La droite (OA) recoupe $\mathcal{C}$ en D.



1. Démontrer que les triangle ABD et AHC sont semblables.
2. Écrire les égalités de rapports de longueurs que l'on peut en déduire.
3. On pose $AB = c$, $AC = b$ et $AH = h$. En déduire que $bc = 2rh$.

Correction DS 5

Exercice 2.1. (6 points)

1. FAUX Ils sont semblables.
2. FAUX Il faut que l'angle soit compris entre les côtés respectivement égaux.
3. FAUX Un côté et un angle égaux ne suffit pas.
4. VRAI Ces triangles ont alors leurs trois angles respectivement égaux, donc leur hypoténuse est adjcente à deux angles respectivement de même mesure.
5. FAUX Il faut de plus que le triangle soit isocèle en A.
6. VRAI car on a $OA = OB = OC = OD$ comme rayon du cercle. De plus, les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. Les triangles AOC et BOD ont un angle de même mesure, compris entre deux côtés respectivement égaux.

Exercice 2.2. (5 points)

1. – $OD = OB$ car O est le centre du parallèlogramme $ABCD$.
   – $\widehat{DON} = \widehat{BOM}$ comme angles opposés par le sommet.
   – On a $(DC)//(AB)$ et la sécante (DB). Alors $\widehat{ODN} = \widehat{OBM}$ comme angles alternes-internes.

   Les triangles OBM et ODN ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même mesure. Ils sont isométriques.
2. On en déduit que OBM et ODN ont leurs trois côtés respectivement égaux tels que : $BM = DN$ et $OM = ON$. Comme N, O et M sont alignés dans cet ordre, O est le milieu du $[MN]$.
3. La rotation de centre O et d'angle $180°$ associe les triangles OBM et ODN.

Exercice 2.3. (5 points)

2. – Les points A, E et B sont alignés dans cet ordre
   – Les points A, F et C sont alignés dans cet ordre
   – $(EF)//(BC)$ par construction

   D'après le théorème de Thalès on a : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$
3. Le coefficient de similitude pour passer de ABC à AFE est $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{3}$.
4. Les triangles ABC et AEF ont leurs trois côtés proportionnels, alors ils sont semblables.
5. $Aire_{AEF} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times Aire_{ABC} = \dfrac{1}{9} \times 18 = 2\text{cm}^2$.

Exercice 2.4. (4 points)

1. – Le triangle BDA est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AD]$, donc c'est un triangle rectangle en B. On a : $\widehat{DBA} = 90° = \widehat{AHC}$.
   – Les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BCA}$ interceptent l'arc BA donc $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$.

   Les triangles ABD et AHC ont deux angles respectivement égaux, donc trois. Ils sont semblables.
2. $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{HC}{BD}$
3. $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{h}{c} = \dfrac{b}{2r} \Leftrightarrow bc = 2rh$.

Correction DM 4

Exercice 1.1. (IK) parallèle à (BC) et (BC) perpendiculaire à (AC) donc (IK) est perpendiculaire à (AC). Dans le triangle ACI, (CK) et (IK) sont deux hauteurs qui se coupent en K. Donc (AK) est la troisième hauteur : elle est perpendiculaire à (CI).

Exercice 1.2. ABK est un triangle rectangle en K donc il est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$. De même, ALK est rectangle en L et est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$. Les quatre point sont donc sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 1.3. Annulé

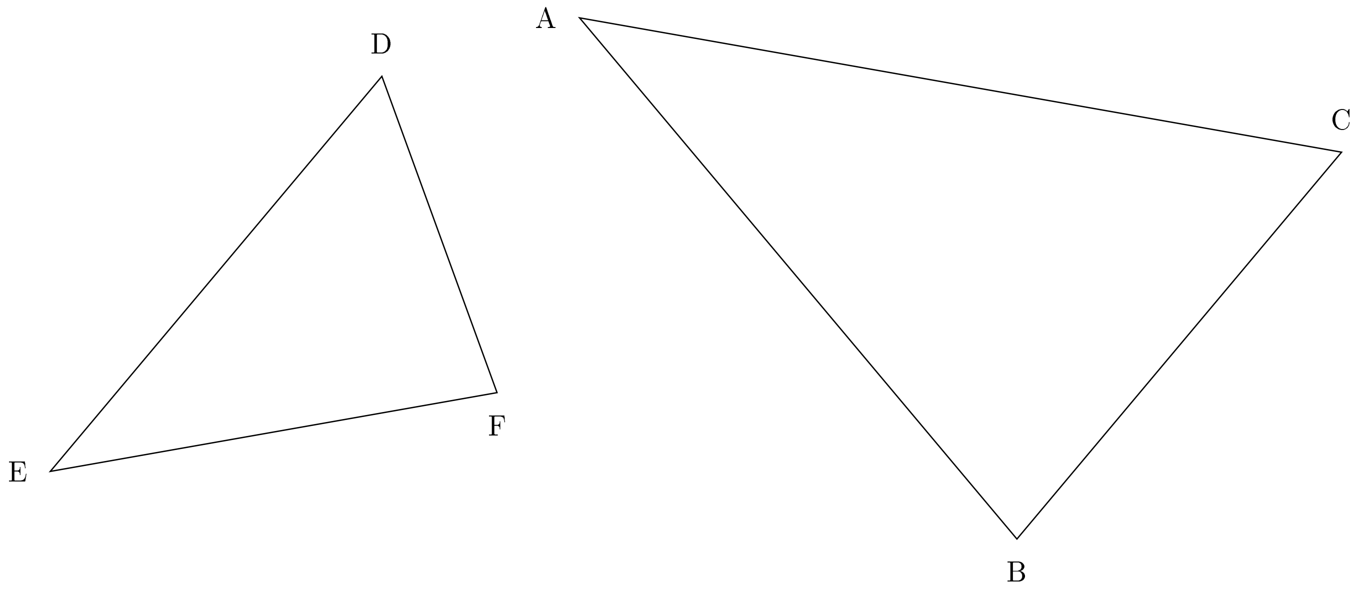
Exercice 1.4. $ABCD$ est un carré donc le triangle ADF est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore, on a donc : $AF^2 = AD^2 + DF^2 = 8^2 + 6.5^2 = 106.25$.
On trouve de même que $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 100$ et $EF^2 = EC^2 + FC^2 = 2^2 + 1.5^2 = 6.25$. Dans le triangle EFA on a $AF^2 = 106.25$ et $EF^2 + AE^2 = 100 + 6.25 = 106.25$. Donc $AF^2 = AE^2 + EF^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.

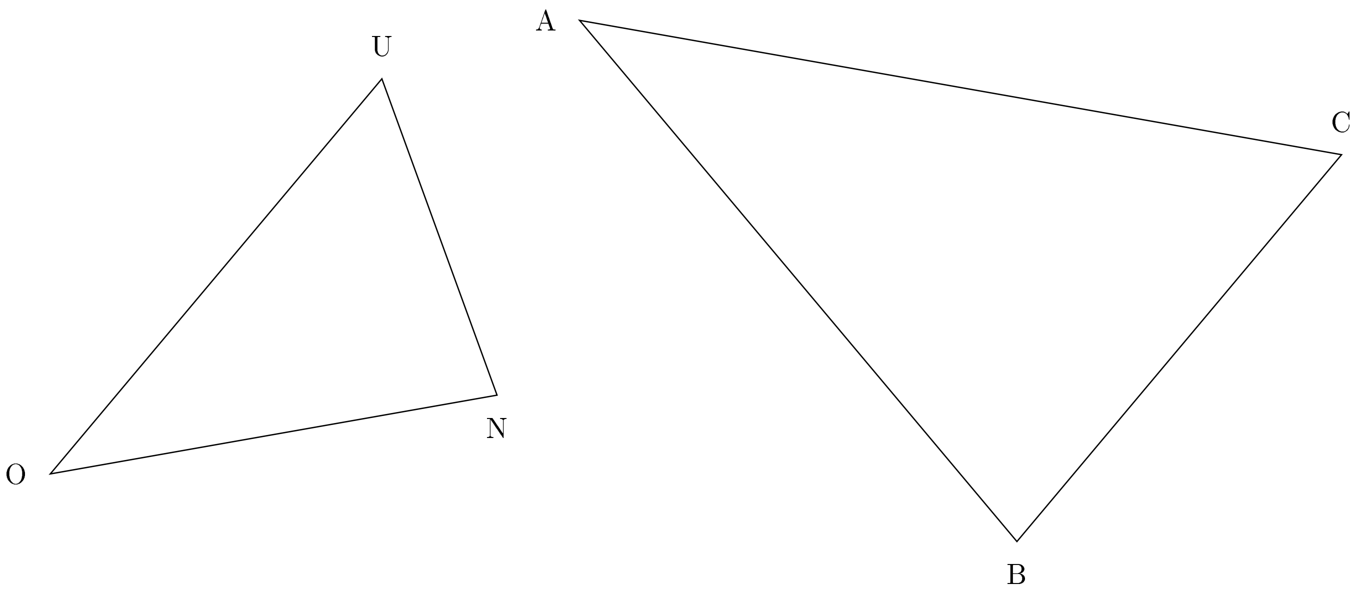
Exercice 1.5. Dans le triangle ABC rectangle en B on a $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{5}{12}$. Donc $\widehat{ACB} \simeq 24.6°$.
Donc on a $\widehat{BAC} = 90 - 24.6 = 65.4°$ et $\widehat{BAI} = \widehat{BAC}/2 = 32.7°$.
Alors dans le triangle ABI rectangle en B on a $\tan \widehat{BAI} = \dfrac{BI}{AB} \Leftrightarrow BI = 5 \times \tan \widehat{BAI} \simeq 3.2$.

Exercice 1.6.

1. (BD) et (CE) sont parallèles, $B \in [AC]$ et $D \in [AE]$. D'après le théorème de Thalès on a $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE} \Leftrightarrow \dfrac{5}{9} = \dfrac{6}{AE} \Leftrightarrow AE = \dfrac{9 \times 6}{5} = 10.8$.
2. Les points A, B et F sont alignés dans cet ordre. De même pour les points A, D, et G. De plus $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{5}{10.5} = \dfrac{10}{21}$ et $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{6}{12.6} = \dfrac{60}{126} = \dfrac{10}{21}$ Les rapports des longueurs sont égaux donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FG) et (BD) sont parallèles.

Exercice 1.7. L'angle $\widehat{DAC}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{DOC}$. Donc $\widehat{DAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOC} = (56+30)/2 = 43°$.
L'angle $\widehat{DCA}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{DOA}$. Donc $\widehat{DCA} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOA} = (180-30)/2 = 75°$.
L'angle $\widehat{CDA}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{COA}$. Donc $\widehat{CDA} = \dfrac{1}{2}\widehat{COA} = (180-56)/2 = 62°$.


D
A
C
E
F
B


U
A
C
O
N
B