Chapitre 4 : La dépendance mathématique

D. Zancanaro C. Aupérin

2008-2009

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 1er avril 2009

Table des matières

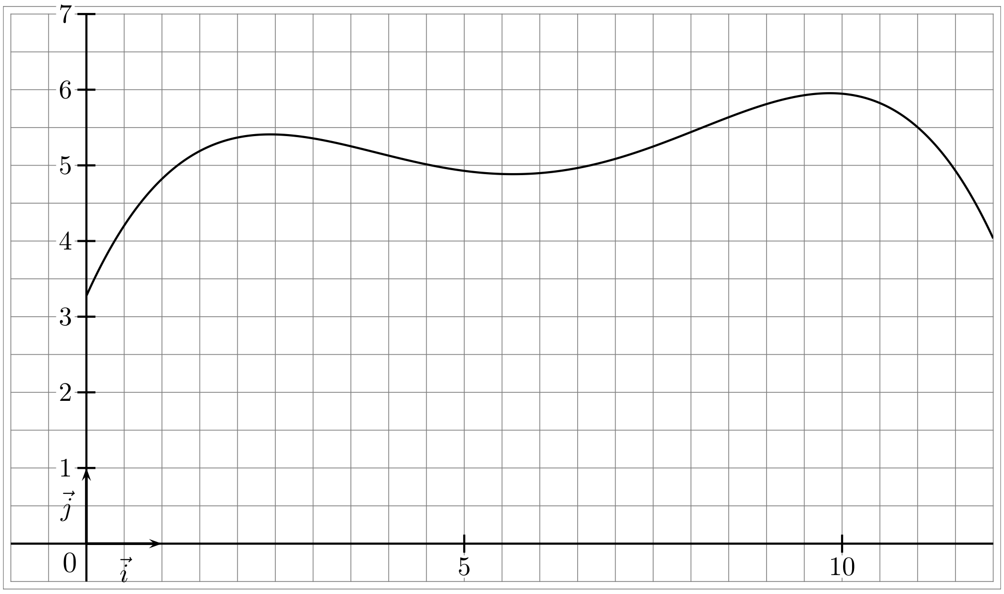
Cours : Généralités sur les fonctions

1 Présentation des machines

1.1 Introduction

Il existe plusieurs types d'approches possibles à la notion de fonction, l'approche graphique et l'approche algébrique

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Le graphique ci-dessous donne le niveau de la mer en mètres dans le port de Narbonne pendant 12 heures. Toutes les informations sont données par ce graphique.



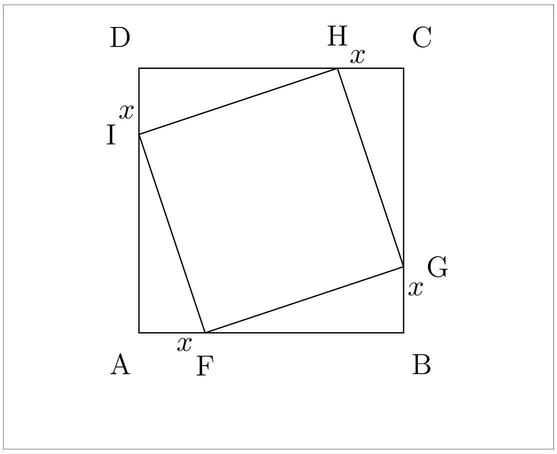
1. D'après ce graphique, sur quel intervalle de temps D peut-on lire la hauteur de la mer ?
2. Quel est le niveau de la mer à 2 h ? à 8 h ?
3. A quelle heure le niveau de la mer est de 3 m ? de 2 m ?
4. Compléter le tableau ci-dessous où h estla hauteur de la mer en mètres à l'instant t.

T	8		12		11	
H		2,5		1,5		5

Ce graphique donne la hauteur de la mer dans le port en fonction de l'heure, il permet de déterminer la hauteur h de la mer à un instant t donné. On note $h = f(t)$, h est fonction du temps t et on dit que f est une fonction. $f(t)$ est l'image de t pat f.

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* On dispose d'une feuille de papier de format $A4$, et on veut fabriquer une boîte sans couvercle. Pour cela on découpe un carré identique dans chaque coin de la feuille et on replie la feuille.
Quel doit être la dimension du carré découpé pour que la boîte ait le plus grand volume possible ?
Le travail se décompose en trois partie : la réalisation de la boîte par les élèves, le calcul du volume, puis à l'aide d'un tableur, observation des variations du volume. Enfin étude théorique.

<u>*Travail de l'élève :*</u> On considère un carré $ABCD$ de côté 6. Les points F, G, H, et I se situent sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de telles manières que $AF = BG = CH = DI = x$.
On utlisera le *cm* comme unité. Le but du problème est détudier la valeur minimale de l'aire du quadrilatère $FGHI$.

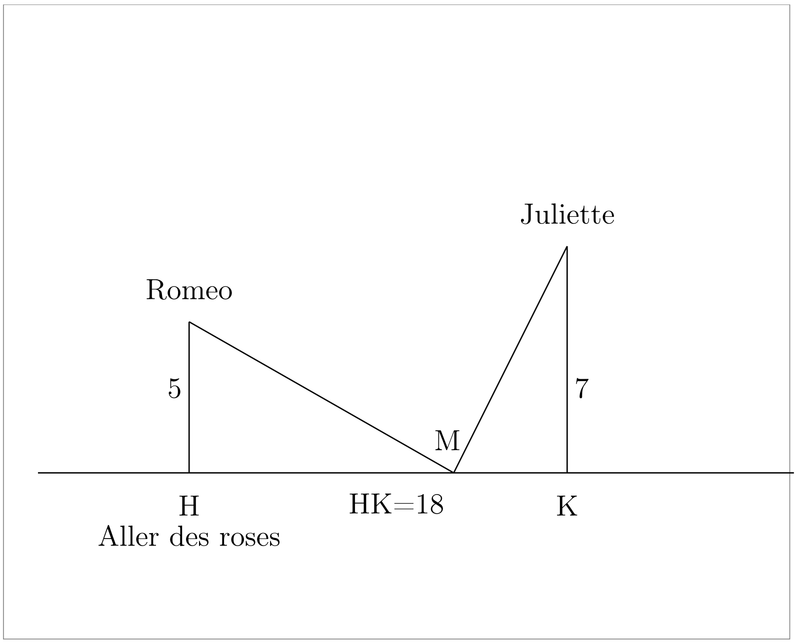


1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Calculer l'aire du quadrilatère $FGHI$ pour $x = 0$, $x = 2$ et $x = 6$.
3. Calculer l'aire $A(x)$ du quadrilatère $FGHI$ en fonction de x.
4. Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$A(x)$							

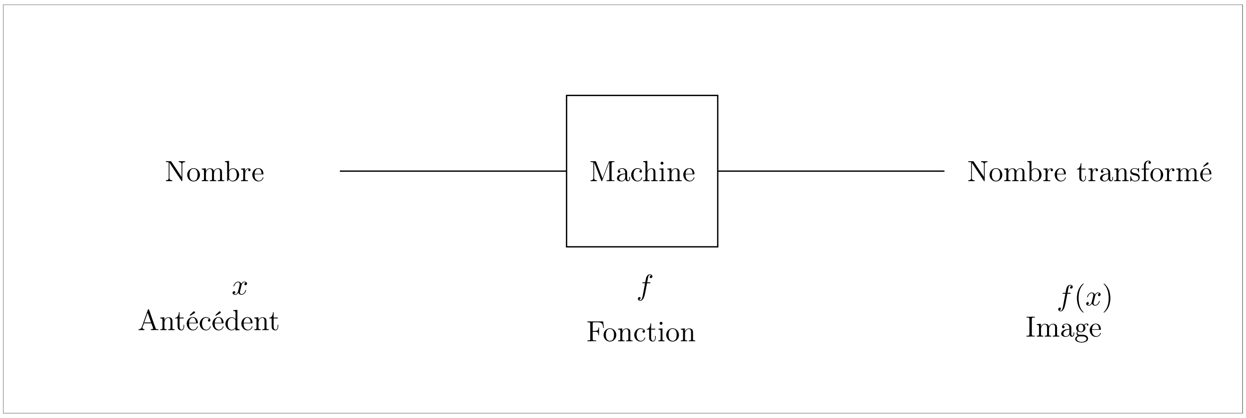
Ce problème peut être traité en partant d'un rectangle au lieu d'un carré. De plus, il peut faire l'objet d'un traitement informatique, soit sur geoplan en classe entière, soit par le professeur au vidéoprojecteur.

<u>*Travail de l'élève :*</u> Roméo souhaite au plus vite offrir une fleur à sa Juliette. La situation est schématisée de la façon suivante :



Indiquez-lui l'endroit de l'allée où cueillir une rose lui permettant de parcourir le plus court chemin.
Ce problème se traite à l'aide de géoplan, une première partie observation, puis résolution du problème par une méthode analytique.

On peut voir une fonction comme une machine, dans laquelle on introduit un nombre et en ressort un nombre transformé ou modifié.

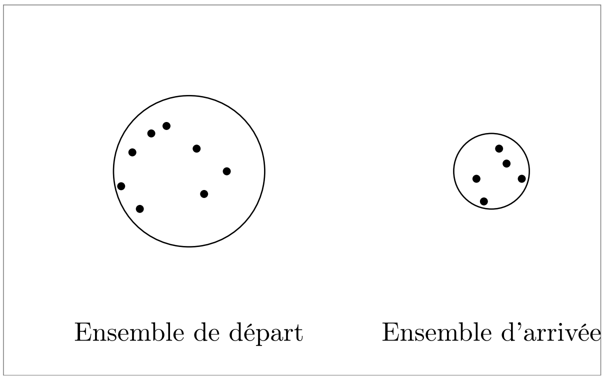


Ce procédé permet de transformer un nombre en un autre nombre.

Exemple : Considérons la machine qui ajoute 3 et élève au carré. Si on rentre le nombre 4, il en ressort 49, si on rentre 0, il en ressort 9 . Les nombres qui rentrent dans la machine sont appelés les antécédents, ceux qui en sortent sont appelés les images.

<u>Définition</u> 1. Une fonction est un procédé qui fait correspondre à un èlèment d'un ensemble de départ **au plus** un élément d'un ensemble d'arrivée.

On peut illustrer ce procédé par le diagramme suivant :



Vocabulaire : Les fonctions sont appelées par des lettres. On note par exemple f la fonction qui à tout réel x positif associe le réel $\sqrt{x} + 3x$ de la manière suivante :

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} + 3x \end{array}$$

On dit que $\sqrt{x} + 3x$, noté bien souvent $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
De la même manière, on dit que x est l'antécédent de $f(x)$.

Exemple : Soit la fonction

$$\begin{array}{rlll} f: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 - 3 \end{array}$$

Déterminer l'image de 3, puis celle de -1.
Déterminer les antécédents éventuels de 12, de -3 et de -6.

Remarque : Un nombre peut ne pas avoir d'antécédent comme en avoir plusieurs. Par contre l'image d'un nombre, losrqu'elle existe, est unique.

Exercice 1.1. On choisit un nombre x, on lui ajoute 4, on él'eve le résultat au carré, on retranche 16 et on divise le tout par le nombre de départ. Quelle est l'image, notée $f(x)$ de x ? Quelle est l'image de 4 ? de 0 ?

Exercice 1.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 3$

1. Calculer l'image de 0, l'image de 1 et l'image de $\sqrt{2}$.
2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f.

Exercice 1.3. Soit la fonction $florent$ définie sur $\mathbb{R}$ par $florent(x) = x^2 - \frac{6}{x}$.

1. Calculer $florent(-3)$, $florent(2)$ et $florent(-1)$.
2. Pourquoi l'image de 0 par $florent$ n'existe-t-elle pas ?

Exercice 1.4. Soit $Keelut$ une fonction affine et $Wanda$ une fonction linéaire.

1. Sachant que $Keelut(2) = 6$ et $Keelut(0) = 1$, déterminer l'expression de $Keelut(x)$.
2. Sachant que $Wanda(2) = 6$, déterminer l'expression de $Wanda(x)$.
3. Tracer les droites d_K et d_W représentant respectivement les fonctions $Keelut$ et $Wanda$.

Exercice 1.5. Transmath : 1à 3 p 84, 4-5 p 84

2 Ensemble de définition

Travail de l'élève : On considère la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$. Calculer l'image de 2, de 4 et de 3.

Définition 2. Par définition d'une fonction, un élément de départ peut ne pas avoir d'image, on dit alors que c'est une **valeur interdite**.
L'ensemble des réels possédant une image par une fonction f est appelé **ensemble de définition** de la fonction. On le note D_f.

On trouve les valeurs interdites en appliquant les deux règles suivantes :
- On ne divise paspar zéro
- On ne prend pas racine d'un nombre strictement négatif

Il faudra donc toujours se poser les questions suivantes : Dans l'expression de l'image,
- Y a-t-il un quotient ? Si oui, le dénominateur peut-il être nul ?
- Y a-t-il une racine ? Si oui, la quantité dont on prend la racine peut-elle être strictement négative ?

Exemples :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Trouver son ensemble de définition.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x-1}{4-5x}$. Trouver son ensemble de définition.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{-x+1}$. Trouver son ensemble de définition.

Remarque : On peut alors écrire :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 3x + 1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll} \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{5}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{3x-1}{4-5x} \end{array} \qquad h: \begin{array}{ll}]-\infty; 1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{-x+1} \end{array}$$

Exercice 2.1. Soient les fonctions *David*, *Taupie* et *Loic* définie par $David(x) = 4x^2 - x + 3$, $Taupie(x) = \dfrac{x^2-2}{(x-1)(2x+3)}$ et $Loic(x) = \sqrt{x^2-9}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de chacune des trois fonctions.
2. Déterminer l'image de -1 par *David*, de 0, de 1 par *Taupie* et de 2 par *Loic*.
3. Déterminer les antécédents de 3 par *David*, de 0 par *Taupie*, de 4 par *Loic*, puis de $\dfrac{47}{16}$ par *David*, de -5 par *Loic*.

Exemple : Transmath n°6 à 10 p 84 + 56 à 59 p 89.

3 Courbe représentative

Travail de l'élève : On peut associer à une fonction f un tableau de valeurs. Il comporte deux lignes, la première regroupe les antécédents (x) et la seconde les images correspondantes ($f(x)$). *Exemple :* Soit d la fonction défninie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x^2 - 1$

x	-3	2	0	-1	7	1,5	4
$d(x)$							

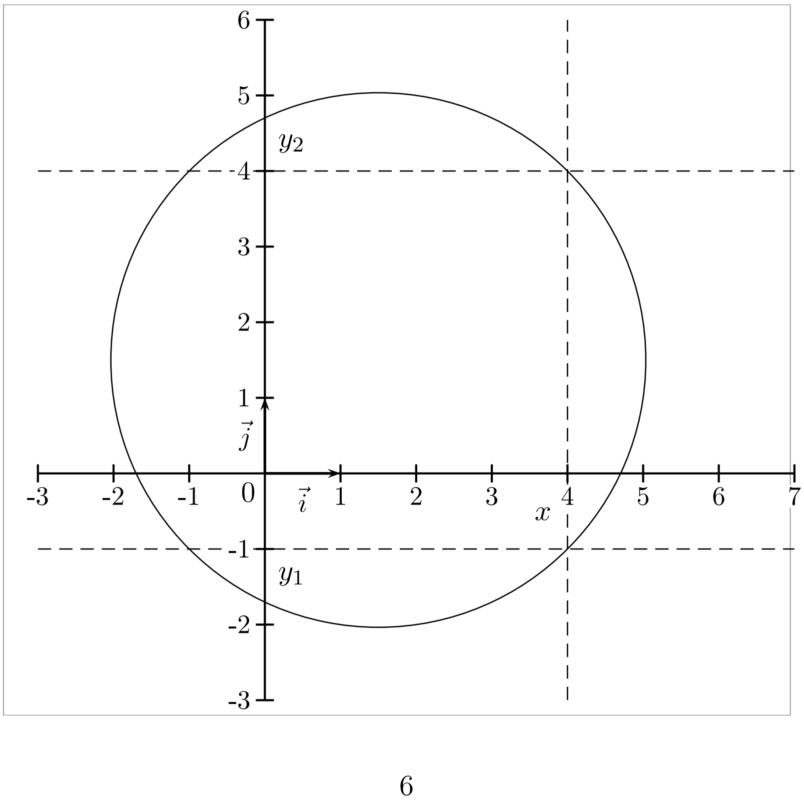
Représenter dans un repère orthonormé les points de coordonnées $(x; d(x))$.
Imaginer alors l'allure de la courbe représentative de la fonction d.

Définition 3. La **courbe représentative** d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt D_f.

Exemple : Soit la fonction a définie par $a(x) = x^3 - 3x + 1$. Tracer sa courbe représentative.

Limite : Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on relie les points du tableau de valeurs avec le plus de cohérence possible. Néanmoins, on ne sait pas comment varie la fonction entre deux points de la courbe. Pour être plus précis, il suffit d'agrandir le tableau de valeurs en diminuant le pas.
Cependant, pour prévoir l'allure d'une courbe, nous allons étudier ses variations. Il est utile de consulter le tracé de la courbe sur la calculatrice avant d'effectuer son propre tracé.

Remarque : Toutes les courbes ne représentent pas des fonctions. On s'appuie sur la définition pour le comprendre. En effet, un élément ne peut avoir plusieurs images.



Remarque : Pour obtenir un tableau de valeurs (et la courbe représentative d'une fonction) à la calculatrice graphique :

- On rentre la fonction considérée dans $Y =$ OU dans Menu + Graph.
- On règle les paramètres du tableau de valeurs (première, dernière valeur de x et pas) dans le menu Table + Tblset (jaune + F4) OU Menu + Table + F5, :

  Start=..., End=..., Pitch=... (sur Casio)

  TblStart=..., ΔTbl=... (sur TI)
- On affiche le tableau dans le menu Graph
- On affiche la courbe représentative dans le menu Trace

<u>Exercice</u> 3.1. 11 p 84 (fct ?), 12, 13 p 84 (Df), 14 à 16 p 84 (tracer)

4 Parité

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$.

1. Comparer $f(1)$ et $f(-1)$, puis $f(2)$ et $f(-2)$
2. Tracer sur l'intervalle $[-2;2]$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (échelle : 3cm pour l'axe des abscisses, 1cm pour l'axe des ordonnées).
3. Comparer alors graphiquement $f(1.5)$ et $f(-1.5)$, puis $f(0.5)$ et $f(-0.5)$
4. Pour $x \in [-2;2]$ expliquer pourquoi $-x \in [-2;2]$ et comparer $f(x)$ et $f(-x)$.
5. Quelle propriété géométrique semble avoir la courbe ?
6. On considère les points M et M' de la courbe représentative de f, d'abscisse respective x et $-x$. Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

<u>Définition</u> 4. Soit f une fonction définie sur D_f un intervalle symétrique par rapport à 0. On dit que f est **paire** ssi pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = f(-x)$.

Exemple : Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2$ est une fonction paire.

Propriété 1. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Comparer $f(1)$ et $f(-1)$, puis $f(2)$ et $f(-2)$
2. Tracer sur l'intervalle $[-4;4]$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (échelle : 2cm pour l'axe des abscisses, 10cm pour l'axe des ordonnées).
3. Comparer alors graphiquement $f(1.5)$ et $f(-1.5)$, puis $f(3)$ et $f(-3)$
4. Pour $x \in [-4;4]$ expliquer pourquoi $-x \in [-4;4]$ et comparer $f(x)$ et $f(-x)$.
5. Quelle propriété géométrique semble avoir la courbe ?
6. On considère les points M et M' de la courbe représentative de f, d'abscisse respective x et $-x$. Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

<u>Définition</u> 5. Soit f une fonction définie sur D_f un intervalle symétrique par rapport à 0. On dit que f est **impaire** ssi pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = -f(-x)$.

Exemple : Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^3$ est une fonction impaire.

Propriété 2. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est possède l'origine du repère comme centre de symétrie.

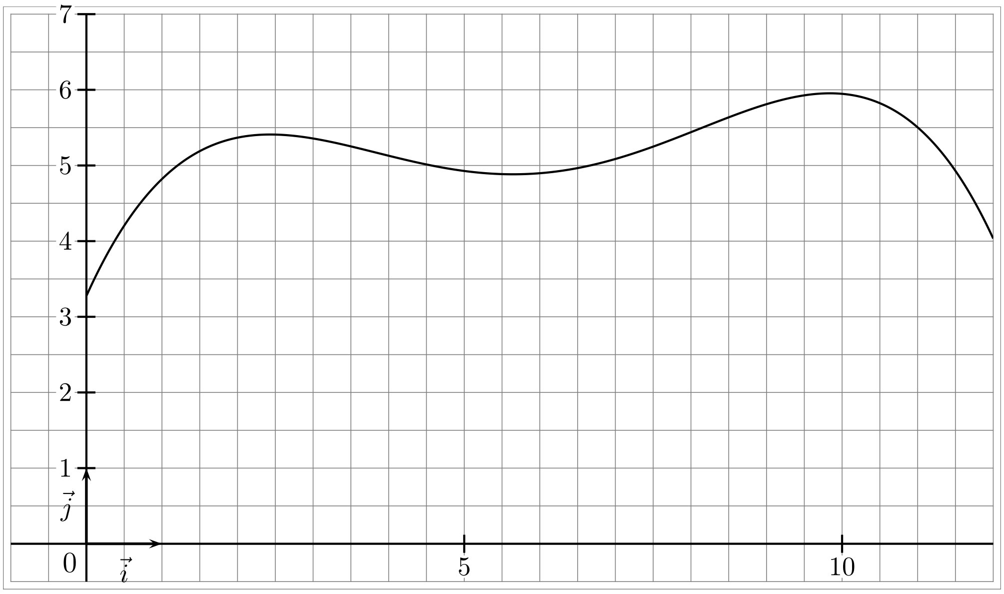
Exercice 4.1. On considère la fonction r définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $r(x) = x(x-2)$.

1. Étudier la parité de la fonction r.
2. Démontrer que $r(x) = (x-1)^2 - 1$.
3. Démontrer que la fonction r est minorée par -1.
4. Dans un repère orthonormal, tracer soigneusement la représentation graphique C_r de la fonction r (on se limitera à l'intervalle $[-1;3]$)

5 Variations

5.1 Sens de variation

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Le graphique ci-dessous donne le niveau de la mer en mètres dans le port de Narbonne pendant 12h.



1. Cette est-elle la courbe représentative d'une fonction ?

   On note f la fonction niveau de la mer en fonction du temps t.

2. (a) D'après le graphique, déterminer les intervalles de temps sur lesquels le niveau de la mer monte.

   (b) Sur ces intervalles de temps, comment traduire ce phénomène à l'aide de la fonction f ?

   En cas de difficulté, on peut suggérer "pour tout $6 \leq t \leq 9.5$, que peut-on dire de $f(t)$" ?

   On dit que sur l'intervalle .... la fonction f est croissante.

3. (a) D'après le graphique, déterminer l'intervalle de temps sur lequel le niveau de la mer descend.

   (b) Sur chacun de ces intervalles de temps, comment traduire ce phénomène à l'aide de la fonction f ?

   On dit que sur .... la fonction f est décroissante.

Attention ! !

4. (a) Soit g la fonction définie sur un intervalle I contenant les réels 4 et 7 telle que $g(4) > g(7)$. Peut-on conclure que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]4; 7[$?

   (b) Que faut-il préciser en plus pour conclure sur la décroissance de la fonction g ?

A faire plus tard, dans la partie sur les extrema

5. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur maximale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce maximum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un maximum absolu ?

6. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur minimale de la mer ?

(b) Pour quelle valeur de t ce minimum est-il atteint ?

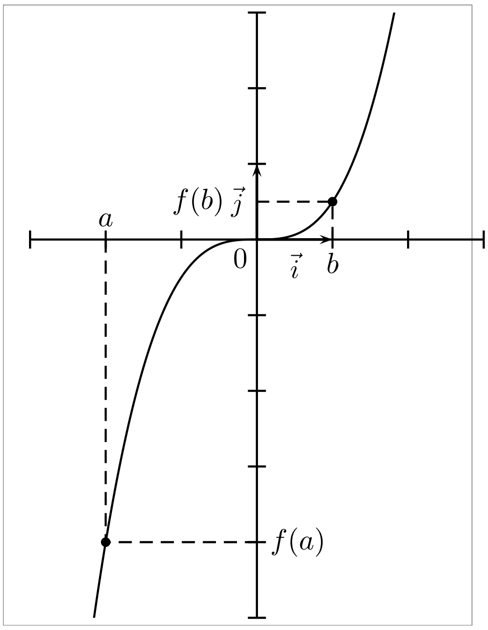
(c) Est-ce un minimum absolu ?

<u>Définition</u> 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels a et b de I on a :

$$a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b) \qquad \text{(respectivement } a < b \Longrightarrow f(a) < f(b) \text{)}$$

Remarque : Antécédents et images sont rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

Exemple :

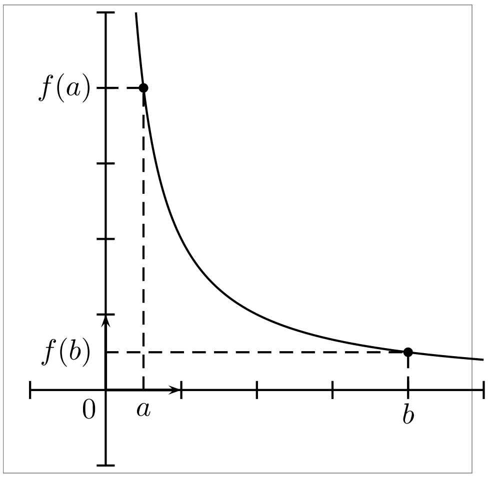


<u>Définition</u> 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels a et b de I on a :

$$a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b) \qquad \text{(respectivement } a < b \Longrightarrow f(a) > f(b) \text{)}$$

Remarque : Antécédents et images sont rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Exemple :

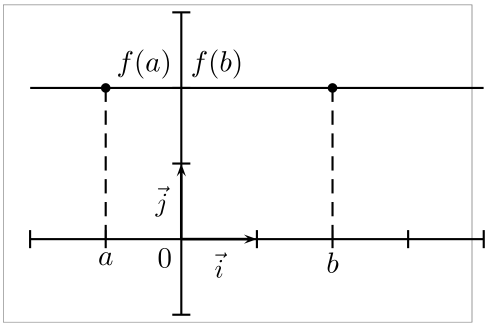


Remarque : On ne parle de fonction croissante ou décroissante que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.

Remarque : On parle de fonction monotone sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.

Définition 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est constante si pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$

Exemple :



Remarque : La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 5.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Montrer que f est croissante.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$. Montrer que g est décroissante.

5.2 Tableau de variations

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Etudier les variations d'une fonction $tibo(x)$ consiste à dire sur quel(s) intervalle(s) elle est croissante, décroissante ou constante. On regroupe ces informations dans un tableau, appelé tableau de variations.
Imaginer un tableau clair qui indique que la fonction $tibo(x)$ est strictement croissante sur $[-1; 0]$ de 0 à 3, strictement décroissante sur $[0; 1]$ de 3 à -5 et constante sur $]1; +\infty[$ égale à -5.
Quel est l'image de 0 ? de 3 ?
Quel est l'antécédent de 0 ? de 3 ?

On regroupe les informations sur les variations d'une fonction dans un tableau du type :

x	-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\longrightarrow$	-5

Les flèches signifient que la fonction f est strictement croissante, décroissante ou constante sur les invtervalles de x considéré.

<u>**Exercice**</u> **5.2.** Soit z la fonction définie par $z(x) = \dfrac{3}{x-3}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Quelles sont les images de 6 ? 4 ? 0 ?
3. Quels sont les antécédents de 12 ? 8 ?
4. Démontrer que la fonction est décroissante sur $[3; +\infty[$ et décroissante sur $] - \infty; 3]$.
5. Dresser le tableau de variations de z.
6. Tracer la courbe représentative de z.

<u>**Exercice**</u> **5.3.** 46 à 48 p 87 (sauf c), 89 p 92, 70 p 91, 74 p 91, 78 ou 79 p 91

6 Extrema

Travail de l'élève : Fin de l'activité sur les variations

Définition 9. Soit f une fonction définie sur un intervalle Iet $a \in I$. On dit que f admet un maximum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$.
$f(a)$ est le maximum de f sur I, atteint en a.

Exemple : Quel est le maximum de la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = -x^2 + 3$?
Pour tout x on a $-x^2 \leq 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 3 \leq 3 \Longleftrightarrow t(x) \leq t(0)$.
Donc le maximum de t est 3, atteint en 0 (pour $x = 0$.

Définition 10. Soit f une fonction définie sur un intervalle Iet $a \in I$. On dit que f admet un minimum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \geq f(a)$.
$f(a)$ est le minimum de f sur I, atteint en a.

Exemple : Quel est le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^2 - \sqrt{3}$?
Pour tout x on a $x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \Longleftrightarrow v(x) \geq v(0)$.
Donc le minimum de v est $\sqrt{3}$, atteint en 0 (pour $x = 0$.

Remarque : On parle d'extremum lorsque la fonction admet soit minimum, soit maximum.

Exercice 6.1. On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 5cm. Soit I un point du cercle (C) et M un point du segment $[OI]$, différent de O et I. La perpendiculaire à la droite (OI) passant par M coupe le cercle (C) en A et B.

1. Construire les points E et F, symétriques respectifs de A et B par rapport à O.
2. Montrer que le quadrilatère $AFEB$ est un rectangle inscrit dans le cercle (C).
3. On note $OM = x$ et $Aire(x)$ la fonction donnant l'aire du rectangle $AFEB$ en fonction de x.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $Aire$?
   (b) Montrer que $Aire(x) = 4x\sqrt{1 - x^2}$.
4. On admet que le tableau de variations de $Aire$ est le suivant :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f(x)$			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Tracer la courbe représentative de $Aire$.

5. Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $AFEB$ est-elle maximum ? Quel est ce maximum ?
6. Que peut-on alors dire du rectangle $AFEB$?

Exercice 6.2. Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur un intervalle $[-1; 3]$:

x	-1		0		1		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

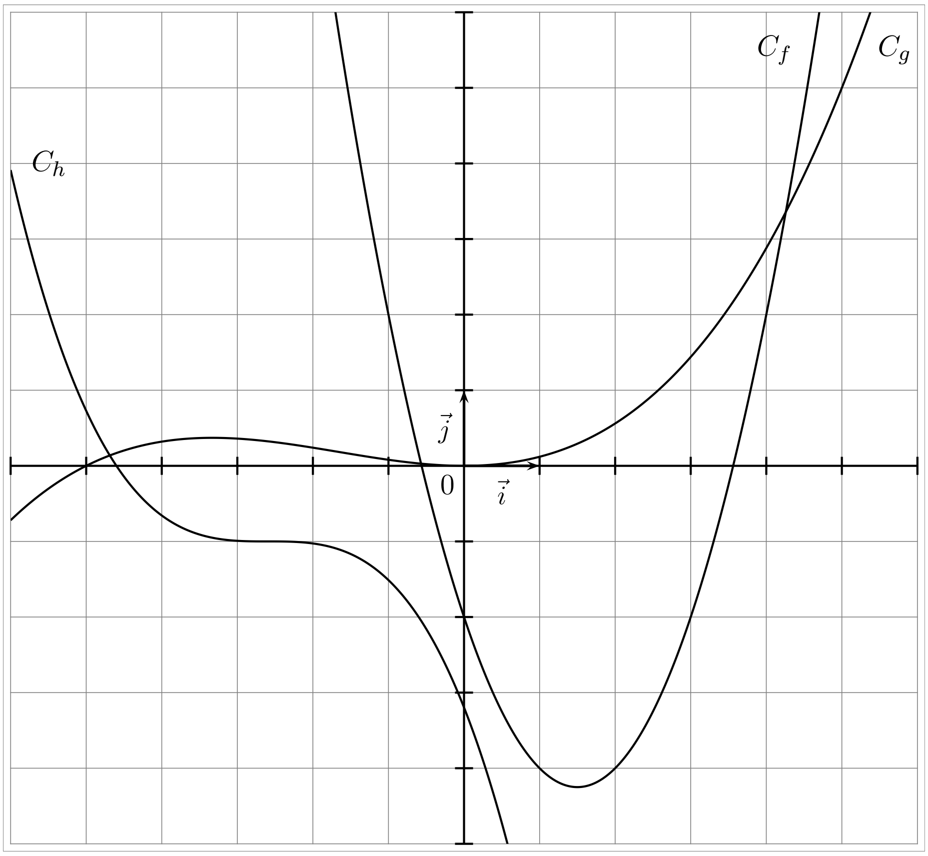
1. Lire $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quel est le maximum de f sur $[-1; 3]$? Quand est-il atteint ?
3. Quel est le minimum de f sur $[-1; 3]$? Quand est-il atteint ?
4. Pour $x \in [0; 1]$, encadrer $f(x)$
5. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[-1; 3[$.
6. Encadrer $f(-0,5)$, $f(0,8)$ et $f(2,1)$

Exercice 6.3. Quelle est le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x-2)^2 + 4$?

Exercice 6.4. 46-47 p 87 + 83-84 p 91

7 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Travail de l'élève : Soient f, g et h trois fonctions définies par le graphe suivant :



Résoudre :

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = h(x)$ puis, $f(x) = g(x)$ et enfin $g(x) = h(x)$
3. $f(x) < 2$, puis $g(x) \geq 1$
4. $f(x) \geq h(x)$ puis $f(x) < h(x)$

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, $k \in \mathbb{R}$

7.1 Résolution graphique d'équations

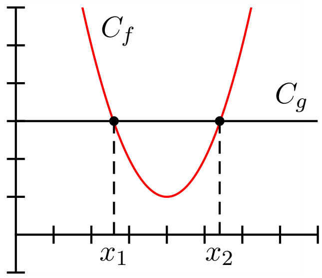
Cas particulier : Résolution de $f(x) = k$ sur I.

Déterminer sur un intervalle I les solutions de $f(x) = k$ revient à trouver tous les antécédents de k appartenant à I.

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$:
Pour résoudre cette équaiton graphiquement, on trace la courbe représentative C_f de la fonction f, et la droite d d'équation $y = k$ (horizontale).
Les solutions de l'équation sont les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et d.

Exemple :
Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x-4)^2 + 1 = 3$$

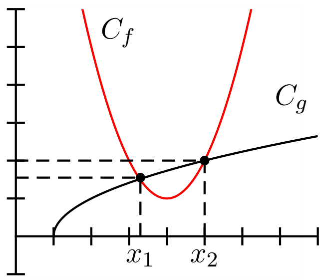


Soit $f : x \to (x-4)^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $k = 3$.
Donc $S = \{x_1; x_2\}$

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$:
On trace sur I les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.
Les solutions de l'équation sont alors les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et C_g.

Exemple :
Résoudre graphiquement sur $[-1; +\infty[$ l'équation

$$(x-4)^2 + 1 = \sqrt{x+1}$$



Soient $f : x \to (x-4)^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \to \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1; +\infty[$.
Donc $S = \{x_1; x_2\}$

7.2 Résolution graphique d'inéquations

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$:
On trace sur I les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.
Les solutions de l'équation sont alors les abscisses des éventuels points de C_f se trouvant au dessous de C_g.

Exemple : En prenant les deux exemples ci-dessus, on trouve $S =]x_1; x_2[$ dans les deux cas.

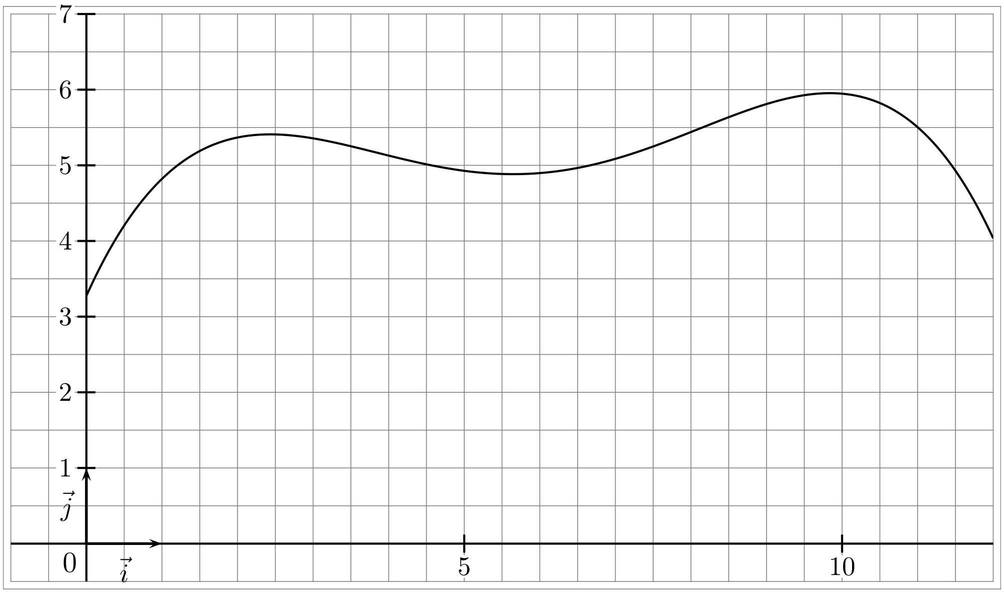
Exercice 7.1.

1. (a) Développer $(x-1)^2(x+2)$
   (b) Résoudre alors léquation $x^3 - 3x + 2 = 0$
2. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3$ et $k(x) = 3x - 2$
   (a) Tracer soigneusement les représentations graphiques C_h et C_k de h et k sur l'intervalle $[-2; 2]$.
   (b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de C_h et C_k.
3. À l'aide de la question 1), retrouver ce résultat par le calcul.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leq 1$

Exercice 7.2. 17 à 20 p 85, 62-63 p 90

Les Annexes

Travail de l'élève : Le graphique ci-dessous donne le niveau de la mer en mètres dans le port de Narbonne pendant 12 heures. Toutes les informations sont données par ce graphique.



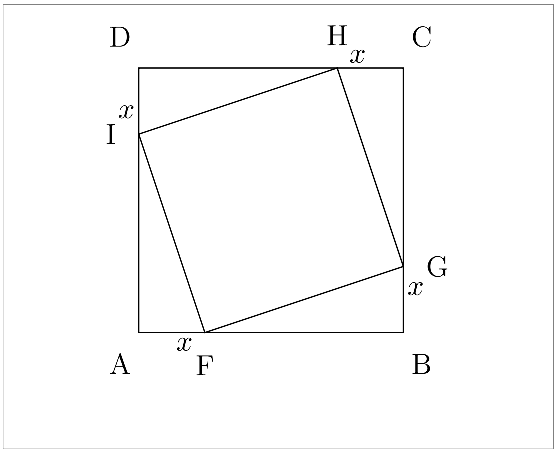
1. D'après ce graphique, sur quel intervalle de temps D peut-on lire la hauteur de la mer ?
2. Quel est le niveau de la mer à 2 h ? à 8 h ?
3. A quelle heure le niveau de la mer est de 3 m ? de 2 m ?
4. Compléter le tableau ci-dessous où h estla hauteur de la mer en mètres à l'instant t.

T	8		12		11	
H		2,5		1,5		5

Ce graphique donne la hauteur de la mer dans le port en fonction de l'heure, il permet de déterminer la hauteur h de la mer à un instant t donné. On note $h = f(t)$, h est fonction du temps t et on dit que f est une fonction. $f(t)$ est l'image de t pat f.

Travail de l'élève : On dispose d'une feuille de papier de format $A4$, et on veut fabriquer une boîte sans couvercle. Pour cela on découpe un carré identique dans chaque coin de la feuille et on replie la feuille.
Quel doit être la dimension du carré découpé pour que la boîte ait le plus grand volume possible ?

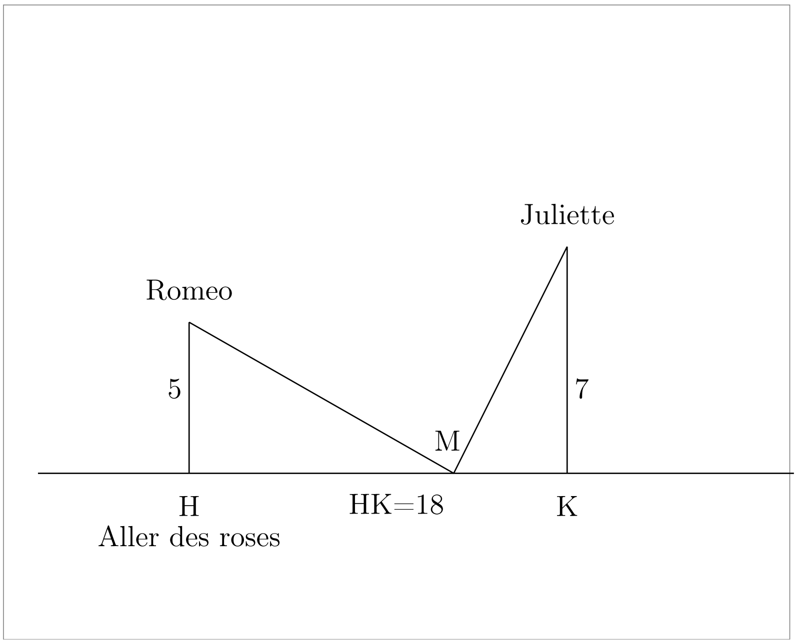
Travail de l'élève : On considère un carré $ABCD$ de côté 6. Les points F, G, H, et I se situent sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de telles manières que $AF = BG = CH = DI = x$.
On utlisera le cm comme unité. Le but du problème est détudier la valeur minimale de l'aire du quadrilatère $FGHI$.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Calculer l'aire du quadrilatère $FGHI$ pour $x = 0$, $x = 2$ et $x = 6$.
3. Calculer l'aire $A(x)$ du quadrilatère $FGHI$ en fonction de x.
4. Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$A(x)$							

Travail de l'élève : Roméo souhaite au plus vite offrir une fleur à sa Juliette. La situation est schématisée de la façon suivante :



Indiquez-lui l'endroit de l'allée où cueillir une rose lui permettant de parcourir le plus court chemin.

Parité

Partie 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$.

1. Comparer $f(1)$ et $f(-1)$, puis $f(2)$ et $f(-2)$
2. Tracer sur l'intervalle $[-2;2]$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (échelle : 3cm pour l'axe des abscisses, 1cm pour l'axe des ordonnées).
3. Comparer alors graphiquement $f(1.5)$ et $f(-1.5)$, puis $f(0.5)$ et $f(-0.5)$
4. Pour $x \in [-2;2]$ expliquer pourquoi $-x \in [-2;2]$ et comparer $f(x)$ et $f(-x)$.
5. Quelle propriété géométrique semble avoir la courbe ?
6. On considère les points M et M' de la courbe représentative de f, d'abscisse respective x et $-x$. Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

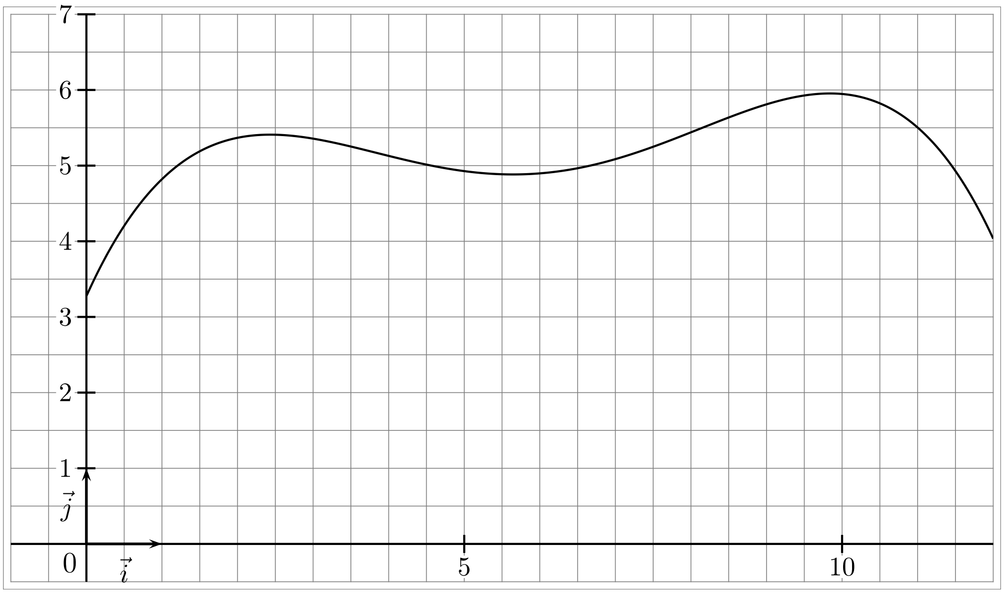
Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$.

1. Comparer $f(1)$ et $f(-1)$, puis $f(2)$ et $f(-2)$
2. Tracer sur l'intervalle $[-2;2]$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (échelle : 3cm pour l'axe des abscisses, 1cm pour l'axe des ordonnées).
3. Comparer alors graphiquement $f(1.5)$ et $f(-1.5)$, puis $f(0.5)$ et $f(-0.5)$
4. Pour $x \in [-2;2]$ expliquer pourquoi $-x \in [-2;2]$ et comparer $f(x)$ et $f(-x)$.
5. Quelle propriété géométrique semble avoir la courbe ?
6. On considère les points M et M' de la courbe représentative de f, d'abscisse respective x et $-x$. Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Variations

Le graphique ci-dessous donne le niveau de la mer en mètres dans le port de Narbonne pendant 12h.



1. Cette est-elle la courbe représentative d'une fonction ?

   On note f la fonction niveau de la mer en fonction du temps t.

2. (a) D'après le graphique, déterminer les intervalles de temps sur lesquels le niveau de la mer monte.

   (b) Sur ces intervalles de temps, comment traduire ce phénomène à l'aide de la fonction f ?

   On dit que sur l'intervalle .... la fonction f est croissante.

3. (a) D'après le graphique, déterminer l'intervalle de temps sur lequel le niveau de la mer descend.

   (b) Sur chacun de ces intervalles de temps, comment traduire ce phénomène à l'aide de la fonction f ?

   On dit que sur .... la fonction f est décroissante.

Attention ! !

4. (a) Soit g la fonction définie sur un intervalle I contenant les réels 4 et 7 telle que $g(4) > g(7)$. Peut-on conclure que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]4; 7[$?

   (b) Que faut-il préciser en plus pour conclure sur la décroissance de la fonction g ?

5. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur maximale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce maximum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un maximum absolu ?

6. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur minimale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce minimum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un minimum absolu ?

Étude mathématique de la dépendance

Exercice 1.1. On choisit un nombre x, on lui ajoute 4, on él'eve le résultat au carré, on retranche 16 et on divise le tout par le nombre de départ. Quelle est l'image, notée $f(x)$ de x ? Quelle est l'image de 4 ? de 0 ?

Exercice 1.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 3$

1. Calculer l'image de 0, l'image de 1 et l'image de $\sqrt{2}$.
2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f.

Exercice 1.3. Soit la fonction $florent$ définie sur $\mathbb{R}$ par $florent(x) = x^2 - \dfrac{6}{x}$.

1. Calculer $florent(-3)$, $florent(2)$ et $florent(-1)$.
2. Pourquoi l'image de 0 par $florent$ n'existe-t-elle pas ?

Exercice 1.4. Soit $Keelut$ une fonction affine et $Wanda$ une fonction linéaire.

1. Sachant que $Keelut(2) = 6$ et $Keelut(0) = 1$, déterminer l'expression de $Keelut(x)$.
2. Sachant que $Wanda(2) = 6$, déterminer l'expression de $Wanda(x)$.
3. Tracer les droites d_K et d_W représentant respectivement les fonctions $Keelut$ et $Wanda$.

Exercice 2.1. Soient les fonctions $David$, $Taupie$ et $Loic$ définie par $David(x) = 4x^2 - x + 3$, $Taupie(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x-1)(2x+3)}$ et $Loic(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de chacune des trois fonctions.
2. Déterminer l'image de -1 par $David$, de 0, de 1 par $Taupie$ et de 2 par $Loic$.
3. Déterminer les antécédents de 3 et de $\dfrac{47}{16}$ par $David$, de 0 par $Taupie$, de 4 et de -5 par $Loic$.

Exercice 4.1. On considère la fonction r définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $r(x) = x(x-2)$.

1. Étudier la parité de la fonction r.
2. Démontrer que $r(x) = (x-1)^2 - 1$.
3. Démontrer que la fonction r est minorée par -1.
4. Dans un repère orthonormal, tracer soigneusement la représentation graphique C_r de la fonction r (on se limitera à l'intervalle $[-1; 3]$)

Exercice 5.1. Soit z la fonction définie par $z(x) = \dfrac{3}{x-3}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Quelles sont les images de 6 ? 4 ? 0 ? Quels sont les antécédents de 12 ? 8 ?
3. Démontrer que la fonction est décroissante sur $[3; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 3]$.
4. Dresser le tableau de variations de z.
5. Tracer la courbe représentative de z.

Exercice 5.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Montrer que f est croissante.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$. Montrer que g est décroissante.

Exercice 6.1. On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 5cm. Soit I un point du cercle (C) et M un point du segment $[OI]$, différent de O et I. La perpendiculaire à la droite (OI) passant par M coupe le cercle (C) en A et B.

1. Construire les points E et F, symétriques respectifs de A et B par rapport à O.
2. Montrer que le quadrilatère $AFEB$ est un rectangle inscrit dans le cercle (C).
3. On note $OM = x$ et $Aire(x)$ la fonction donnant l'aire du rectangle $AFEB$ en fonction de x.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $Aire$?
   (b) Montrer que $Aire(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$.
4. On admet que le tableau de variations de $Aire$ est le suivant :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

   Tracer la courbe représentative de $Aire$.

5. Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $AFEB$ est-elle maximum ? Quel est ce maximum ?
6. Que peut-on alors dire du rectangle $AFEB$?

Exercice 6.2. Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur un intervalle $[-1; 3]$:

x	-1		0		1		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

1. Lire $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quel est le maximum de f sur $[-1; 3]$? Quand est-il atteint ?
3. Quel est le minimum de f sur $[-1; 3]$? Quand est-il atteint ?
4. Pour $x \in [0; 1]$, encadrer $f(x)$.
5. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[-1; 3[$.
6. Encadrer $f(-0,5)$, $f(0,8)$ et $f(2,1)$.

Exercice 6.3. Quelle est le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x-2)^2 + 4$?

Fiche d'Exercice 2

Exercice 5.1. Voici un tableau de variations :

x	-3		-1		1		$+3$
$g(x)$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

Dessiner la représentation graphique d'une fonction g vérifiant ce tableau.

Exercice 5.2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

1. Donner son ensemble de définition
2. Démontrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1[$
3. Démontrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 6.1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5(1-x)^2 - 2$. Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$. En déduire le tableau de variation de la fonction h. Donner son minimum. Quand est-il atteint ?

Exercice 7.1.

1. (a) Développer $(x-1)^2(x+2)$
   (b) Résoudre alors l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$
2. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3$ et $k(x) = 3x - 2$
   (a) Tracer soigneusement les représentations graphiques C_h et C_k de h et k sur l'intervalle $[-2;2]$.
   (b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de C_h et C_k.
3. À l'aide de la question 1), retrouver ce résultat par le calcul.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leq 1$

Exercice 7.2. On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

1. Déterminer son ensemble de définition
2. Démontrer que $f(x) = (1-x)(x-2)$
3. Tracer soigneusement la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 7.3. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x \qquad h(x) = x - 3$$

1. Etablir un tableau de valeurs pour les trois fonctions, allant de -2 à 4, de pas 0.5.
2. Tracer dans un même repère les représentations graphiques C_f, C_g et C_h respectivement des fonctions f, g et h sur $[-2;4]$. *Conseils* :
   (a) On graduera l'axe des abscisses de -2 à 4 en prenant 2cm par unité
   (b) On graduera l'axe des ordonnées de -5 à 5 en prenant 1cm par unité
3. À l'aide des graphiques, déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_h
4. Comparaison des fonctions f et g
   (a) À l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
      i. Combien y a-t-il de points d'intersections entre C_f et C_g ?
      ii. Quelles sont leurs coordonnées ?
   (b) Pour avoir plus de précision, on se porpose de retrouver ces résultats par le calcul :
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
      ii. En déduire, par le calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection de C_f et C_g
   (c) Sur quel(s) intervalle(s) a-t-on $f \leq g$?

Exercice 7.4.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction "racine carré"
2. Dresser son tableau de variations
3. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$

Exercice 7.5.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction "carré"
2. Dresser son tableau de variations
3. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $x^2 \leq 3$
4. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $x^2 \geq 2$
5. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $1 \leq x^2 \leq 5$

Exercice 7.6.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction "inverse"
2. Dresser son tableau de variations
3. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$
4. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement -1 $\leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$
5. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

Exercice 7.7. On considère un quart de cercle $\mathcal{C}$ de rayon $OI = 1$. M est un point quelconque de ce quart de cercle, H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO.
On note x la longueur OH et h la longueur HM. On a donc $0 \leq x \leq 1$.

1. Faire un schéma de la situation
2. Exprimer la longueur h en fonction de x
3. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH. Démontrer que $f(x) = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.
4. Etablir le tableau de valeur de la fonction f de 0 à 1, de pas 0.1 (et rajouter 0.95). On arrondira les valeurs à 10^{-2} près.
5. Tracer sur une feuille séparée la représentation graphique C_f de la fonction f dans un repère. (Unités : 10 cm en abscisse pour une unité ; 20 cm pour une unité en ordonnée)

Exercice 7.8. On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Etudier la parité de la fonction f
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f
4. En déduire son tableau de variations
5. Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$ (on pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$)

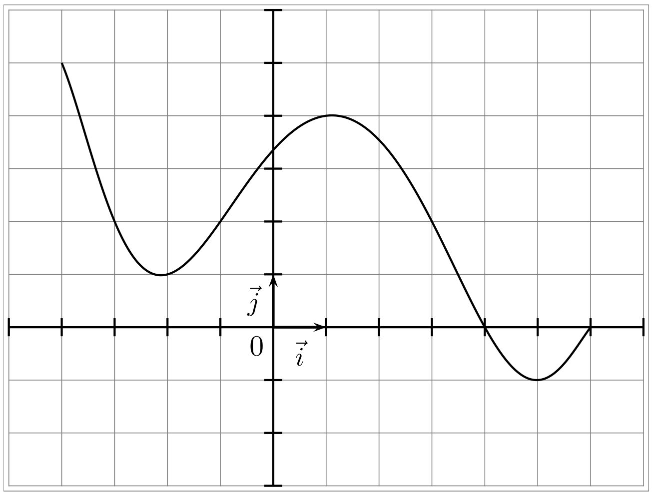
Exercice 7.9. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^2}$

1. Donner son ensemble de définition.
2. Démontrer que f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la parité de la fonction f
4. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f (on se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
5. Donner par lecture graphique la valeur maximum de la fonction f sur :
   (a) l'intervalle $[-1;1]$
   (b) l'intervalle $[-2;1]$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$

Devoir Surveillé n°4

Exercice 8.1. (12 points)
On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f pour répondre graphiquement aux question suivantes.

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Déterminer l'image de 5 par la fonction f
3. Donner $f(-4)$
4. Déterminer s'ils existent, les antécédents de 2 par la fonction f.
5. Déterminer s'ils existent, les antécédents de -2 par la fonction f.
6. En laissant apparaître les traits de justification sur le graphique, résoudre :
   (a) l'équation $f(x) = 3.5$
   (b) l'inéquation $f(x) < 0$
7. Établir le tableau de variations de f
8. Quel est le maximum de la fonction f sur $[-1; 3]$. Préciser quand il est atteint.



Exercice 8.2. (6 points)
On donne le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-10; 10]$

x	-10	-7	-1	0	4	6	10
$g(x)$	0.01	2	0	-5	0	3	1

1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si le tableau ne permet pas de savoir (**justifier chaque réponse**)
   (a) $g(1) > g(3)$
   (b) $g(-6) < 2$
   (c) $g(-9) < g(-6)$
   (d) $g(-5) \leq g(-3)$
2. Indiquer l̀'aide d'un tableau le signe de $g(x)$

Exercice 8.3. (2 points) *Exercice à faire à la calculatrice, aucune explication n'est demandée*
Soient les fonctions $Norbert$ et $Simone$ définies sur l'intervalle $[-4; 3]$ par $Norbert(x) = x^2 - 2$ et $Simone(x) = -2x^2 - 2x + 3$.
Résoudre graphiquement :
- $Norbert(x) = Simone(x)$: $\mathcal{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $Norbert(x) < Simone(x)$: $\mathcal{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 8.4. (20 points)

1. On se donne la fonction h définie par $h(x) = (3x-5)^2 - 16$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?
   (b) Calculer l'image de 0 et de -1 par h.
   (c) Calculer la valeur exacte de $h(\sqrt{2})$ (calculs détaillés).
   (d) i. Factoriser l'expression de $h(x)$
      ii. En déduire par le calcul les éventuels antécédents de 0 par h.
      iii. Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?
      On commencera par dresser le tableau de signe de la fonction h
      iv. Comment peut-on vérifier ces calculs avec une calculatrice graphique ?
   (e) Déterminer s'ils existent, les antécédents de -16 et de -25 par h.
   (f) i. Montrer que, pour tout réel x, on a $h(x) = 9x^2 - 30x + 9$.
      ii. En déduire par le calcul les éventuels antécédents de 9 par h.
2. On se donne la fonction t défiie par $t(x) = \dfrac{3x}{4-4x}$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction t ?
   (b) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, en arrondissant au dixième si nécessaire.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	0.8	0.9
$t(x)$								

x	1.1	1.2	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$t(x)$								

   (c) Tracer avec soin la courbe représentative de la fonction t dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm sur chaque axe.
   (d) Est-il vrai que le point de coordonnées $(0.2; 0.2)$ appartient à la courbe ? Justifier.
   (e) Soit a un nombre compris entre 0.4 et 0.5. Donner, en écrivant et en justifiant toutes les étapes de calcul, un encadrement de $t(a)$

Devoir Surveillé n°4

Exercice 8.1. (12 points)

1. $D_f = [-4; 6]$
2. $f(5) = -1$
3. $f(-4) = 5$
4. Les antécédents de 2 sont -3, -1 et 3.
5. Il n'existe pas d'antécédent de -2.
6. (a) $\mathcal{S} = \{-3.5; 0.2; 2\}$

   (b) $\mathcal{S} =]4; 6[$

7.

x	-4		-2		1		5		6
$f(x)$	5	↘	1	↗	4	↘	-1	↗	0

8. Le maximum de la fonction f sur $[-1; 3]$ est 4 atteint quand $x = 1$

Exercice 8.2. (6 points)

x	-10		-7		-1		0		4		6		10
$g(x)$	0.01	↗	2	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	3	↘	1

1. (a) Sur $[0; 4]$ la fonction g est strictement croissante donc $1 < 3 \Rightarrow g(1) < g(3)$. FAUX

   (b) $g(-7) = 2$ et la fonction g est strictement décroissante sur $[-7; -1]$ donc $-7 < -6 \Rightarrow g(-7) > g(-6) \Leftrightarrow 2 > g(-6)$. VRAI

   (c) $-9 \in [-10; -7]$ et $-6 \in [-7; -1]$, intervalles sur lesquels la fonction g est respectivement croissant puis décroissante. Le tableau ne nous permet donc pas de comparer $g(-9)$ et $g(-6)$.

   (d) Sur $[-7; -1]$ la fonction g est strictement décroissante donc $-5 < -3 \Rightarrow g(-5) > g(-3)$. FAUX

2.

x	-10		-1		4		10
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 8.3. (2 points)

- $Norbert(x) = Simone(x)$: $\mathcal{S} = \{-1.7; 1\}$
- $Norbert(x) < Simone(x)$: $\mathcal{S} =]1.7; 1[$

<u>Exercice</u> 8.4. (20 points)

1. On se donne la fonction h définie par $h(x) = (3x-5)^2 - 16$
   (a) La fonction h n'a ni racine ni quotient, donc $D_h = \mathbb{R}$.
   (b) $h(0) = (3 \times 0 - 5)^2 - 16 = (-5)^2 - 16 = 25 - 16 = 9$.
   $h(-1) = (3 \times (-1) - 5)^2 - 16 = (-8)^2 - 16 = 64 - 16 = 48$.
   (c) $h(\sqrt{2}) = \left(3\sqrt{2} - 5\right)^2 - 16 = 9 \times 2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + 25 - 16 = 27 - 30\sqrt{2}$
   (d) i. $h(x) = (3x - 5 - 4)(3x - 5 + 4) = (3x - 9)(3x - 1)$
   ii. $h(x) = 0 \Leftrightarrow (3x-9)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$ ou $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \dfrac{1}{3}$.
   iii.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Cette fonction est donc positive quand $x \in]-\infty; \frac{1}{3}] \cup [3; +\infty[$
   iv. On trace sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction h, et on regarde les abscisses des points pour lesquelles la courbe est au dessus de l'axe des abscisses.
   (e) $h(x) = -16 \Leftrightarrow (3x-5)^2 - 16 = -16 \Leftrightarrow (3x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$. L'antécédent de -16 est $\dfrac{5}{3}$.
   (f) i. $h(x) = (3x-5)^2 - 16 = 9x^2 - 2 \times 3x \times 5 + 25 - 16 = \times 9x^2 - 30x + 9$.
   ii. $h(x) = 9 \Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 9 = 9 \Leftrightarrow 9x^2 - 30x = 0 \Leftrightarrow 3x(3x - 10) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{10}{3}$. Les antécédents de 9 par h sont 0 et $\dfrac{10}{3}$.
2. On se donne la fonction t défiie par $t(x) = \dfrac{3x}{4-4x}$.
   (a) On doit avoir $4 - 4x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$. L'ensemble de définition de la fonction t est $D_t = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
   (b)

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	0.8	0.9
$t(x)$	-0.5	-0.45	-0.38	-0.25	0	0.75	3	6.75

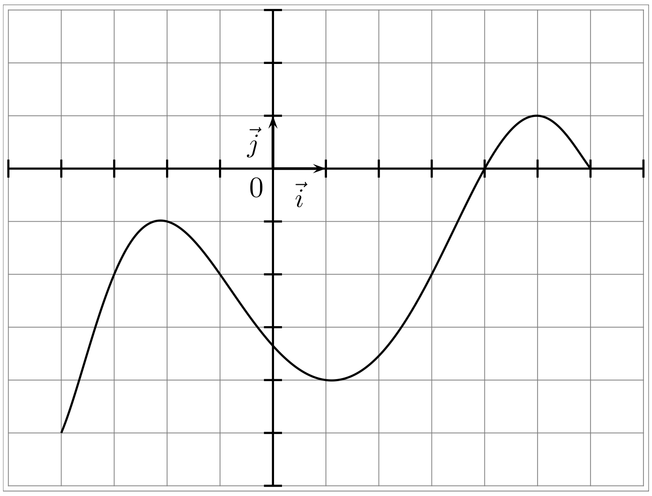
x	1.1	1.2	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$t(x)$	-8.25	-4.5	-0.32	-1.5	-1.25	-1.125	-1.05	-1

   (c) Voir calculatrice graphique ...
   (d) $t(0.2) = \dfrac{3 \times 0.2}{4 - 4 \times 0.2} = \dfrac{0.6}{3.2} = 0.1875 \neq 0.2$. Donc le point de coordonnées $(0.2; 0.2)$ n'appartient pas à la courbe.
   (e) $0.4 < a < 0.5 \Leftrightarrow 1.2 < 3a < 1.5$ et $0.4 < a < 0.5 \Leftrightarrow -1.6 > -4a > -2 \Leftrightarrow 2.4 > 4 - 4a > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2.4} < \dfrac{1}{4-4a} < \dfrac{1}{2}$. Donc $\dfrac{1.2}{2.4} < \dfrac{3a}{4-4a} < \dfrac{1.5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < t(a) < \dfrac{3}{4}$.

Devoir Surveillé n°4

Exercice 8.1. (11 points)
On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f pour répondre graphiquement aux question suivantes.

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Déterminer l'image de 5 par la fonction f
3. Donner $f(-4)$
4. Déterminer s'ils existent, les antécédents de -2 par la fonction f.
5. Déterminer s'ils existent, les antécédents de 2 par la fonction f.
6. En laissant apparaître les traits de justification sur le graphique, résoudre :
   (a) l'équation $f(x) = -3.5$
   (b) l'inéquation $f(x) > 0$
7. Établir le tableau de variations de f
8. Quel est le minimum de la fonction f sur $[-1; 3]$. Préciser quand il est atteint.



Exercice 8.2. (6 points)
On donne le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-10; 10]$

x	-10	-7	-1	0	4	6	10
		2 ↗ ↘				3 ↗ ↘	
$g(x)$			0		0		
	0.01			-5			1

1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si le tableau ne permet pas de savoir (**justifier chaque réponse**)

   (a) $g(-6) < 2$
   (b) $g(1) > g(3)$
   (c) $g(-5) \leq g(-3)$
   (d) $g(-9) < g(-6)$

2. Indiquer l'aide d'un tableau le signe de $f(x)$

Exercice 8.3. (2 points) *Exercice à faire à la calculatrice, aucune explication n'est demandée*
Soient les fonctions $Norbert$ et $Simone$ définies sur l'intervalle $[-4; 3]$ par $Norbert(x) = x^2 - 2$ et $Simone(x) = -2x^2 - 2x + 3$.
Résoudre graphiquement :
- $Norbert(x) = Simone(x)$: $\mathcal{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $Norbert(x) > Simone(x)$: $\mathcal{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 8.4. (12 points)

On se donne la fonction h définie par $h(x) = (3x-2)^2 - 16$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?
2. Calculer l'image de 0 et de -1 par h.
3. Calculer la valeur exacte de $h(\sqrt{3})$ (calculs détaillés).
4. (a) Factoriser l'expression de $h(x)$
   (b) En déduire par le calcul les éventuels antécédents de 0 par h.
   (c) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?
   On commencera par dresser le tableau de signe de la fonction h
   (d) Comment peut-on vérifier ces calculs avec une calculatrice graphique ?
5. Déterminer s'ils existent, les antécédents de -16 et de 25 par h.
6. (a) Montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) = 9x^2 - 12x - 12$.
   (b) En déduire par le calcul les éventuels antécédents de -12 par h.

Exercice 8.5. (9 points)

ABC est un triangle isocèle en A avec $AB = AC = 10$ cm. H est le pied de la hauteur issue de A. **Dans ce problème, on se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle ABC lorsqu'on fait varier la longueur x en cm du côté $[BC]$.** *On peut faire un schéma pour s'aider.*
On désigne par $a(x)$ l'aire du triangle ABC. On donne : $a(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.

1. Peut-on avoir $x = -5$? Pourquoi ? Dans quel intervalle varie x ?
2. Compléter le tableau de valeurs de a ci-dessous, en arrondissant au dixième si nécessaire.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(x)$											

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a(x)$										

3. Dans un repère orthonormal où 1 cm représente l'unité sur l'axe des abscisse et 2 cm représentent 10 unités sur l'axe des ordonnées, tracer avec soin la courbe représentative de la fonction a.
4. La fonction a admet un maximum pour une certaine valeur M de x.
   (a) À l'aide du graphique, encadrer cette valeur par deux entiers consécutifs.
   (b) Compléter le tableau suivant par des valeurs approchées au centième :

x	13.9	14	14.1	14.2	14.3	14.4	14.5
$a(x)$							

   (c) Donner un encadrement plus précis de M.
   (d) Quelle est la nature du triangle ABC quand $x = M$?

Devoir Surveillé n°4

Exercice 8.1. (11 points)

1. $D_f = [-4;6]$
2. $f(5) = 1$
3. $f(-4) = -5$
4. Les antécédents de -2 sont -3, -1 et 3.
5. Il n'existe pas d'antécédent de 2.
6. (a) $\mathcal{S} = \{-3.5; 0.2; 2\}$

   (b) $\mathcal{S} =]4;6[$
7.

x	-4		-2		1		5		6
$f(x)$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

8. Le minimum de la fonction f sur $[-1;3]$ est -4 atteint quand $x = 1$

Exercice 8.2. (6 points)

x	-10		-7		-1		0		4		6		10
$g(x)$	0.01	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

1. (a) $g(-7) = 2$ et la fonction g est strictement décroissante sur $[-7;-1]$ donc $-7 < -6 \Rightarrow g(-7) > g(-6) \Leftrightarrow 2 > g(-6)$. VRAI

   (b) Sur $[0;4]$ la fonction g est strictement croissante donc $1 < 3 \Rightarrow g(1) < g(3)$. FAUX

   (c) Sur $[-7;-1]$ la fonction g est strictement décroissante donc $-5 < -3 \Rightarrow g(-5) > g(-3)$. FAUX

   (d) $-9 \in [-10;-7]$ et $-6 \in [-7;-1]$, intervalles sur lesquels la fonction g est respectivement croissant puis décroissante. Le tableau ne nous permet donc pas de comparer $g(-9)$ et $g(-6)$.
2.

x	-10		-1		4		10
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 8.3. (2 points)

- $Norbert(x) = Simone(x)$: $\mathcal{S} = \{-1.7; 1\}$
- $Norbert(x) > Simone(x)$: $\mathcal{S} =]-\infty; -1.7[\cup]1; +\infty[$

Exercice 8.4. (12 points)

1. On se donne la fonction h définie par $h(x) = (3x-2)^2 - 16$
   (a) La fonction h n'a ni racine ni quotient, donc $D_h = \mathbb{R}$.
   (b) $h(0) = (3 \times 0 - 2)^2 - 16 = (-2)^2 - 16 = 4 - 16 = -12$.
   $h(-1) = (3 \times (-1) - 2)^2 - 16 = (-5)^2 - 16 = 25 - 16 = 9$.
   (c) $h(\sqrt{3}) = \left(3\sqrt{3} - 2\right)^2 - 16 = 9 \times 3 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 2 + 4 - 16 = 6 - 6\sqrt{3}$
   (d) i. $h(x) = (3x - 2 - 4)(3x - 2 + 4) = (3x - 6)(3x + 2)$
   ii. $h(x) = 0 \Leftrightarrow (3x-6)(3x+2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0$ ou $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$.
   iii.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Cette fonction est donc positive quand $x \in]-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [2; +\infty[$
   iv. On trace sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction h, et on regarde les abscisses des points pour lesquelles la courbe est au dessus de l'axe des abscisses.
   (e) $h(x) = -16 \Leftrightarrow (3x-2)^2 - 16 = -16 \Leftrightarrow (3x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. L'antécédent de -16 est $\dfrac{2}{3}$.
   (f) i. $h(x) = (3x-2)^2 - 16 = 9x^2 - 2 \times 3x \times 2 + 4 - 16 = \times 9x^2 - 12x - 12$.
   ii. $h(x) = -12 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x - 12 = -12 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(3x-4) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{4}{3}$. Les antécédents de 9 par h sont 0 et $\dfrac{4}{3}$.

Exercice 8.5. (9 points)

1. x est une longueur donc on ne peut pas avoir $x = -5$. Un triangle est constructible si la somme de deux côtés est inférieur au troisième, on doit dont avoir $x < AB + AC = 20$ et x varie dans $[0; 20]$.
2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(x)$	0	5.00	9.95	14.83	19.60	23.85	28.62	32.79	36.66	40.19	43.30

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a(x)$	45.93	48	49.40	49.99	49.61	48	44.78	39.23	29.66	0

3. cf calculatrice graphique (attention à l'échelle !)
4. On trouve $14 < M < 15$.
5.

x	13.9	14	14.1	14.2	14.3	14.4	14.5
$a(x)$	49.97	49.99	50.00	50.00	49.99	49.97	49.93

6. On a $14.1 < M < 14.3$
7. Dans ce cas, on s'aperçoit que $AB^2 + AC^2 = 10^2 + 10^2 = 200$ et que $\sqrt{200} \simeq 14.2$. Le triangle isocèle d'aire maximale serait donc rectangle.