Lycée Paul Sabatier, Carcassonne   Classe de 2^{nde}

Chapitre 6 : Droites et système

C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 23 avril 2009

Table des matières

Cours : Droites et système

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1 Équation linéaire à deux inconnues

1.1 Introduction

On souhaite résoudre des équations du type $ax+by=c$ où x et y sont deux inconnues et a et b deux réels connus.
Dans le cas où l'un des réels a ou b est nul, il s'agit simplement d'une équation du premier degré à une inconnue.
Nous allons voir que l'équation à résoudre représente l'équation généralisée des droites. Autrement dit, les solutions de cette équation sont les abscisses et les ordonnées de tous les points de la droite déquation $ax+by=c$.

1.2 Équation de droite

Travail de l'élève : **Caractérisation analytique d'une droite**

Définition 1. *Caractériser une droite $\mathcal{D}$ consiste à établir une relation entre les coordonnées x et y d'un point M de telle sorte que :*
- *Si M appartient à la droite $\mathcal{D}$, alors les coordonnées de M vérifient cette relation,*
- *Si les coordonnées de M vérifient cette relation, alors le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$*

Exemple : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(-1;1)$ et $B(2;2)$.

1. **Caractérisation de la droite** (AB) : Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces vecteurs pour qu'un point $M(x;y)$ du plan soit situé sur la droite (AB).
   (c) Traduire cette condition par une relation sur les coordonnées de ces vecteurs.
   (d) Écrire cette relation sous la forme $y=mx+p$
   On appelle équation réduite de la droite (AB) la relation $y=mx+p$ qui la caractérise.
2. (a) Tracer le repère et la droite (AB)
   (b) Graphiquement, dire si les points $C(5;3)$ et $D(0;1.3)$ semblent appartenir à (AB).
   (c) Par une méthode de calcul vue au collège, retrouver le coefficient directeur m de la droite (AB) et son ordonnée à l'origine p.
   (d) Vérifier par le calcul la question 2.
3. Soit Δ la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B.
   (a) La tracer.
   (b) Dire si les points $G(-3;2.0001)$, $H(0;\sqrt{4})$, $I(7656;2)$ et $J(2;6)$ appartiennent à Δ

(c) i. Donner une équation de la droite Δ

ii. Dire si Δ est la courbe représentative d'une fonction affine et si oui de laquelle.

4. Soit Δ' la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par B

(a) La tracer

(b) Dire si les points G, H, J et $K(2.001; 6345)$ appartiennent à Δ'

(c) i. Donner une équation de la droite Δ'

ii. Dire si Δ' est la courbe représentative d'une fonction affine et si oui de laquelle.

5. (À faire plus tard) On considère l'équation $(E) : -x + 3y = 4$

(a) Parmi les couples couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de (E) :

$$(-1; 1) \qquad (3; -5) \qquad (5; 3) \qquad (2; 2) \qquad (0; 1.3)$$

(b) Montrer que l'équation (E) est celle de la droite (AB).

(c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E). Comment les caractériser ?

Définition 2.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$, appelée **équation réduite**, où m est le coefficient directeur, p l'ordonnée à l'origine.
  Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1; m)$.
- Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ont une équation du type $x = c$.
  Un vecteur directeur de cette droite est $(0; 1)$.

Preuve : Activité dans le cas généralisé.

On considère les distincts points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $M(x; y)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$.

Or le point $M \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à dire que leurs coordonnées sont proportionnelles. Autrement dit :

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff (x_B - x_A)(y - y_A) = (x - x_A)(y_B - y_A) \\ &\iff (x_B - x_A)y - (x_B - x_A)y_A = x(y_B - y_A) - x_A(y_B - y_A) \\ &\iff (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x - (y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A \end{aligned}$$

- Si $x_A \neq x_B$ alors on a :

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff y = \frac{(y_B - y_A)x - (y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A}{x_B - x_A} \\ &\iff y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{-(y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A}{x_B - x_A} \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc du type $y = mx + p$ où $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et p sont connus.

– Si $x_A = x_B$ alors $y_A \neq y_B$ (car A et B dinstincts) et on a :

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff 0 = (y_B - y_A)x - (y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A \\ &\iff x = \frac{(y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A}{y_B - y_A} \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc du type $x = c$ où c est connu.

Méthodes pour déterminer une équation de droite par le calcul :

1. Si on connaît deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la droite d :
   – On calcule le coefficient directeur de la droite grâce à la propriété

$$m = \frac{\text{Différence des } y}{\text{Différence des } x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

   – On remplace m par sa valeur trouvée dans l'équation $y = mx + p$,
   – Or A appartient à d, donc ses coordonnées vérifient l'équation de d.
   On remplace dans l'équation de la droite x et y par les coordonnées de A : $y_A = mx_A + p$ (on peut faire de même avec le point B).
   – On détermine alors p grâce à cette dernière équation.
2. Si on connaît un point $A(x_A; y_A)$ de la droite d et un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$:
   – On pose $M(x; y)$ un autre point de la droite d
   – Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ et $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ sont colinéaires, on en déduit que leurs coordonnées sont proportionnelles :

$$(x - x_A) \times y_{\vec{u}} = (y - y_A) \times x_{\vec{u}}$$

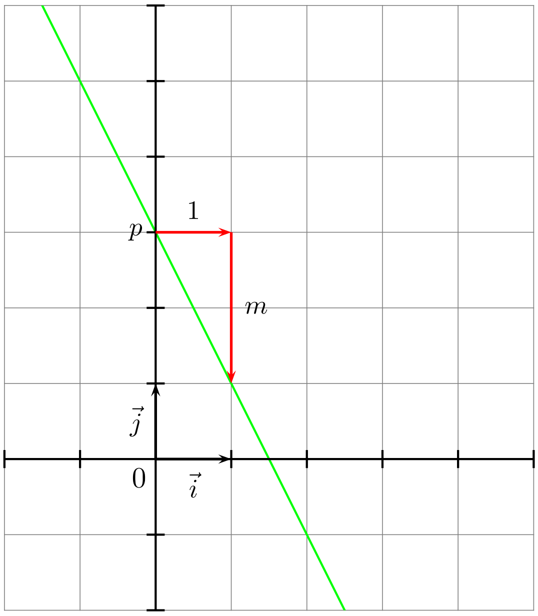
   – On écrit cette relation sous la forme $y = mx + p$ ou $x = c$.

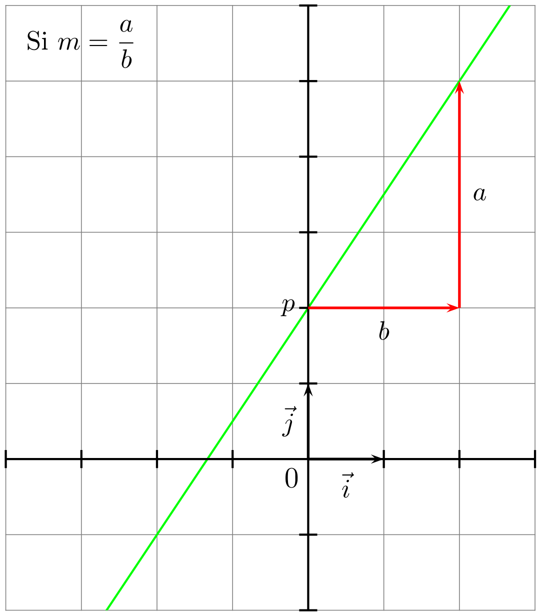
Exemple : Trouver l'équation de la droite (AB) avec $A(-2; 3)$ et $B(-1; -4)$.

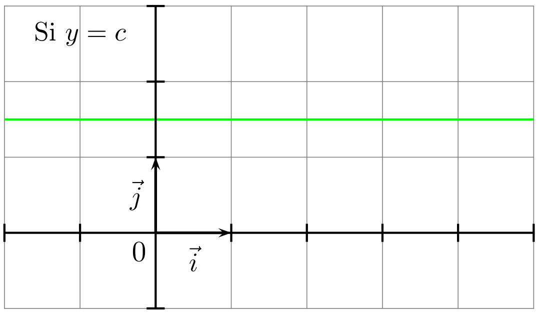
Exemple : Trouver l'équation de la droite d passant par $A(-1; -2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2; 1)$.

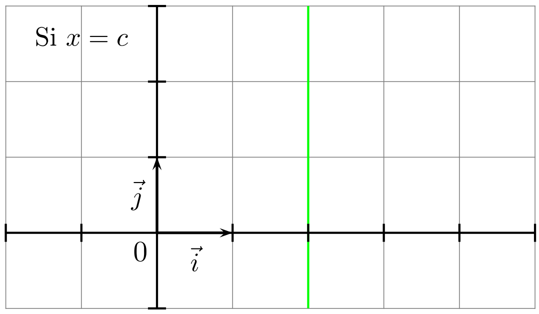
Méthodes pour tracer la représentation graphique d'une droite dont on a l'équation :

1. On détermine les coordonnées de deux points appartenant à la droite, on les place sur le graphique puis on les relie.
2. Sans calculer de coordonnées :
   – On place sur l'axe des ordonnées le point de coordonnée $(0; p)$, p étant l'ordonnées à l'origine de la droite,
   – On construit un deuxième point en utilisant le coefficient directeur de la droite.
3. Si l'équation est du type $x = c$, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par n'importe quel point d'abscisse c, par exemple le point de coordonnées $(c; 0)$







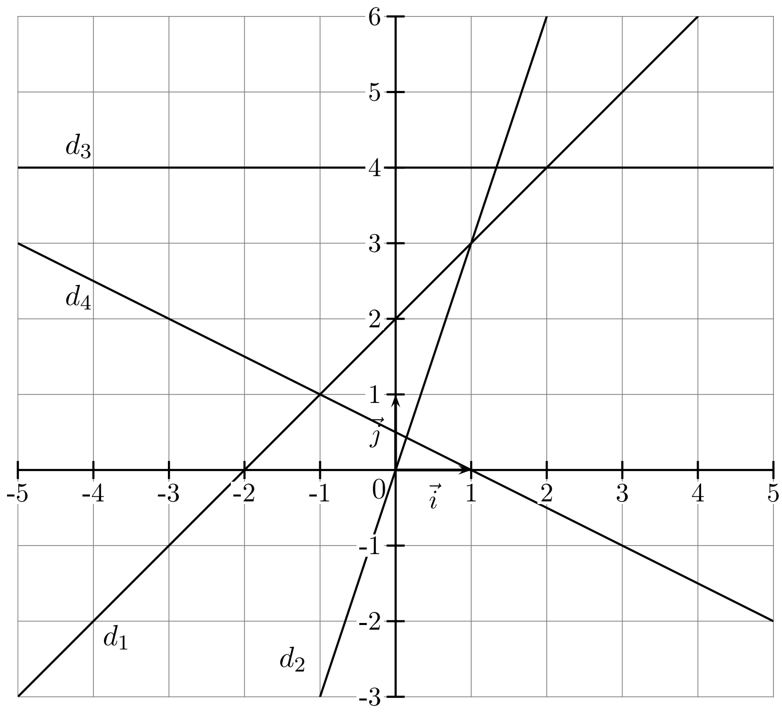


Exercice 1.1. Soient trois points $E(-2;3)$, $D(-2;-1)$ et $F(4;-1)$. Donner les équations des droites (EF), (DE) et (DF).

Exercice 1.2. Construire dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ les droites déquation : $d_1 : y = 3x + 2$, $d_2 : y = \dfrac{1}{3}x + 4$, $d_3 : y = -3x - 1$, $d_4 : y = 3$ et $d_5 : x = 3$.

Exercice 1.3. Construire dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -\dfrac{1}{4}x + 1$, $h(x) = -5$ et $i(x) = \dfrac{3}{5}x$.

Exercice 1.4. Donner les équations réduites de chacune des droites représentées ci-dessous.



1.3 Parallélisme de deux droites

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* On considère les droites $\Delta : y = mx + p$ et $\Delta' : y = mx + q$.

1. Montrer que $A(0; p)$ et $B(1; m + p)$ sont des points de Δ.
2. Montrer que $C(0; q)$ et $D(1; m + q)$ sont des points de Δ'.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
4. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

THÉORÈME 1. Les droites $\Delta : y = mx + p$ et $\Delta' : y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

<u>**Preuve :**</u> $\Longleftarrow$ Cf activité

$\Longrightarrow$ Soient une droite (AB) du plan, de coefficient directeur m et une droite (CD) parallèle à (AB). On considère alors la droite passant par C et de coefficient directeur m. D'après ce qui précède, cette droite est parallèle à (AB). Il s'agit donc de la droite (CD).

Exemple : Les droites d'équation $y = -3x + 2$, $y = -3x + 55$ et $y = -3x$ sont parallèles.

<u>**Exercice**</u> **1.5.** Parmi les droites suivantes, lesquelles sont parallèles ?

– (AB) où $A(2; -1)$ et $B(1; 1)$

- D passant par $C(1;-2)$ et de coefficient directeur 3
- Δ d'équation $= -2x+3$

Exercice 1.6. Soient la droite $d : y = -3x+4$ et le point $A(-2;5)$. Déterminer l'équation de la droite d' parallèle à d et passant par A.

Exercice 1.7.

1. Soit $\Delta : y = 2x+3$. Déterminer une équation de la droite D parallèle à Δ et passant par $A(1;3)$
2. Soient $D(5;3)$, $E(0;-5)$ et $F(-2;2)$. Déterminer une équation de la droite passant par F et parallèle à (DE).

1.4 Interprétation graphique de l'équation liéaire $ax+by=c$

Travail de l'élève : Fin de l'activité 1

Propriété 1. Soient a et b sont deux réels dont l'un au moins n'est pas nul, et c un réel. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $ax+by=c$ est l'ensemble des couples $(x;y)$ vérifiant cette équation.
Cet ensemble représente une droite d dans le plan muni d'un repère. On appelle cette équation, **équation généralisée** de la droite d.
Cette équation admet donc une infinité de solutions, qui sont les coordonnées des points de la droite qu'elle définit.

Exemple : Résoudre l'équation $3x+4y=2$.
- On trouve l'équation réduite de la droite associée : $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.
  Une solution est par exemple le couple $(0;0.5)$: lorsque $x=0$ et $y=0.5$ l'équation est vérifiée.
- A chaque valeur différente de x, on trouve une nouvelle solution $-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ pour y
- On résume cela ainsi : $\mathcal{S} = \left\{ \left(x; -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right),\ \text{où } x \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 1.8. On considère les équations $(F) : x+2y=5$, $G : 2x+0y=4$ et $H : 0x+2y=2$

1. Représenter les droites associées à ces équations dans un repère orthognal.
2. En déduire le nombre et l'ensemble de solutions de chacune.

2 Système linéaire à deux équations

2.1 Position du problème

On souhaite résoudre simultanément deux équations linéaires à deux inconnues x et y, du type $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels connus.
On appelle ceci un système linéaire à deux inconnues et on le note $S : \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, pour préciser qu'il faut résoudre les deux équations en même temps (l'accolade signifiant "et").
Une solution d'un tel système est un couple $(x;y)$ tels que $(x;y)$ soit solution de chacune des deux équations.
Résoudre ce système c'est déterminer tous les couples solutions du système.
Exemple : $S : \begin{cases} 2x+3y=11 \\ 3x-5y=7 \end{cases}$ est un système linéaire. Le couple $(4;1)$ est une solution de ce système.

Exercice 2.1. Le couple $(2;-3)$ est-il solution du système $S : \begin{cases} 5x+2y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$

2.2 Interprétation graphique d'un système linéaire

Travail de l'élève : **Partie A : Équation réduite d'une droite**

1. (a) Faire apparaître le repère dans Géoplan en cliquant sur l'îcone appropriée
   (b) A l'aide de la boîte de style, faire apparaître le quadrillage
   (c) Créer le point $A(4;3)$
   (d) Créer le point B, libre dans le plan (on pourra le déplacer) à coordonnées entières
   (e) Créer la droite (AB)
2. (a) Déplacer le point B sur l'axe des abscisses.
   (b) Indiquer une position particulière de la droite (AB) : ....
   (c) Faire afficher à l'écran l'équation réduite de la droite (AB), à deux décimales près.
   (d) Déplacer le point B sur l'axe des abscisses et compléter le tableau ci-dessous :

x_n	-1	0	1	2	3	4	5
Equation Réduite de la droite (AB)							

3. (a) Déplacer le point B sur l'axe des ordonnées.
   (b) Indiquer une position particulière de la droite (AB) : ....
   (c) Déplacer le point B sur l'axe des ordonnées et compléter le tableau ci-dessous :

y_n	-2	-1	0	1	2	3	4
Equation Réduite de la droite (AB)							

Partie B : Droites parallèles

1. Créer le point C de coordonnées $(0; b)$ où b est un entier quelconque compris entre -3 et 3
2. Créer la droite d passant par C et parallèle à la droite (AB)
3. Créer l'affichage à l'écran de l'équation réduite de la droite d avec 2 décimales
4. Déplacer le point B dans le plan et compléter le tableau ci-dessous :

Coordonnées du point B	$(1; 3)$	$(0; -2)$	$(0; 0)$	$(2; 0)$	$(-4; 1)$	$(-6; -2)$	$(-1; 2)$
Equation Réduite de la droite (AB)							
Equation Réduite de la droite d							

5. Comparer les équations réduites des droites (AB) et d. Que constate-t-on ? ....
....

Partie C : Intersection de deux droites

1. Créer la droite d' passant par C et ayant pour coefficient directeur 1.5
2. Faire bouger la droite d' en pilotant la variable b au clavier
3. Comment se déplace la droite d' ? ....
4. Le point d'intersection I des droites (AB) et d' existe-t-il toujours ? ....
5. Créer ce point et afficher ses coordonnées à l'écran avec 5 décimales.
6. Compléter le tableau ci-dessous :

Equation réduite de la droite (AB)	$y = x-1$	$y = x-1$	$y = x-1$	$y = x-1$	$y = x-1$	$y = x-1$	$y = x-1$
Equation réduite de la droite d'	$y = 1.5x + 3$	$y = 1.5x + 2$	$y = 1.5x + 1$	$y = 1.5x$	$y = 1.5x - 1$	$y = 1.5x - 2$	$y = 1.5x - 3$
Coordonnées du point I							

7. Faire bouger la droite d' en pilotant b au clavier et B sur l'axe des abscisses en utilisant la souris
8. Indiquer les positions particulières des droites (AB) et d'. ....
9. Le point I existe-t-il toujours ? ....
10. Compléter le tableau ci-dessous :

Equation réduite de la droite (AB)	$y = 0.75x$	$y = 1.5x - 3$	$y = -1.5x + 9$	$y = 0.3x + 1.8$	$x = 4$	$y = -3x + 15$
Equation réduite de la droite d'	$y = 1.5x + 3$	$y = 1.5x + 2$	$y = 1.5x$	$y = 1.5x - 1$	$y = 1.5x - 2$	$y = 1.5x - 3$
Coordonnées du point I						

Partie D : Systèmes linéaires

Un système d'équations linéaires à deux inconnues peut s'écrire $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples de réels $(x;y)$ vérifiant les DEUX équations.

Interprétation graphique : Résoudre le système revient à déterminer les coordonnées des éventuels points communs aux deux droites d'équation $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$

1. Créer un nouvelle figure, faire apparaître le repère et le quadrillage.
2. En interprétant graphiquement chacune des équations, justifier le nombre de solutions des systèmes d'équations linéaires suivants, puis les résoudre graphiquement :

   (a) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 1.5x-y=3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 0.75x-0.5y=1 \end{cases}$
3. Soient les tableaux $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0.75 & -0.5 \end{pmatrix}$. Quel rapport ont-ils avec les systèmes précédents ?
4. Lesquels sont des tableaux de proportionnalité ?
5. Quels tableaux pourraient-on créer pour différencier facilement les deux derniers systèmes ?

Propriété 2. Soit le système à deux équations linéaires et à deux inconnues x et y suivant : $S : \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

– Si $ab'-a'b \neq 0$ alors S admet une solution unique
– Si $ab'-a'b=0$ alors S n'admet pas de solution OU S admet une infinité de solutions

Dans tous les cas, les solutions sont les coordonnées des points d'intersection des droites que le système définit.

Preuve :

– Si $bb' \neq 0$: les coefficients directeurs des droites associées aux équations de S sont $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$.

Si $ab'-a'b \neq 0$ alors $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ et les droites ne sont pas parallèles : elles ont un unique point d'intersection, dont les coordonnées sont solutions de S.

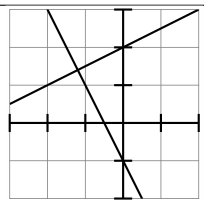
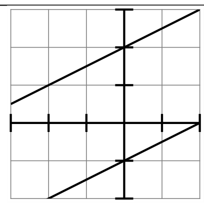
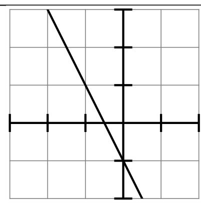
Si $ab'-a'b = 0$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et les droites sont parallèles, soit strictement et il n'y a pas de solution au système, soit confondues, et il y a une infinité de solution au système.

– Si $b=0$ et $b' \neq 0$, alors $a \neq 0$ (sinon le système est une trivialité ou une absurdité), $S \iff \begin{cases} ax=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ et $ab'-a'b=ab' \neq 0$. Dans ce cas, la droite associée à la première équation de S est une droite verticale, tandis que l'autre non. Elles ont un unique point d'intersection.

– Si $b \neq 0$ et $b'=0$: Comme le cas précédent

– Si $b=b'=0$: $S \iff \begin{cases} ax=c \\ a'x=c' \end{cases}$ et $ab'-a'b=0$. Dans ce cas, les deux droites associées aux équations du système sont verticales, donc parallèles (strictement ou non).

Définition 3. On appelle le nombre $ab' - a'b$ le déterminant du système d'équations, car il permet de déterminer à l'avance le nombre de solutions du système.

Déterminant $\neq 0$	Déterminant $= 0$	
Les droites associées sont sécantes	Les droites associées sont strictement parallèles	Les droites associées sont confondues
		
Le système admet une unique solution	Le système n'admet aucune solution	Le système admet une infinité de solutions

Exercice 2.2. Trouver le nombre de couples solutions des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + y = -1 \\ -10x - 5y = -5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

2.3 Méthodes de résolution

Travail de l'élève :

1. **Méthode par substitution :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$
   (a) Exprimer à l'aide de la première équation y en fonction de x.
   (b) Remplacer dans la deuxième équation y par l'expression obtenue.
   (c) Déterminer x, puis en déduire y.
   (d) Écrire l'ensemble des solutions

   Remarques :
   – Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut exprimer x en fonction de y à la $1^{\text{ère}}$ étape)
   – Les rôles des équations sont symétriques (on peut utiliser la $2^{\text{ème}}$ équation dans la $1^{\text{ère}}$ étape)

2. **Méthode par combinaison linéaire :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 7y = -6 \end{cases}$
   (a) Multiplier la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ ligne par des nombres appropriés afin de faire apparaître des coefficients opposés devant le x
   (b) Additionner les deux lignes
   (c) On a obtenu une seule équation à d'inconnue y. Déterminer y

(d) Remplacer y par sa valeur trouvée dans l'une des équations

(e) On a obtenu une seule équation d'inconnue x. Déterminer x

(f) Écrire l'ensemble des solutions.

Remarques :
- Après avoir trouver x, on peut refaire une combinaison linéaire pour trouver y
- Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut travailler sur les coefficients de y)

Il existe trois méthodes pour résoudre des systèmes : **graphiquement**, par **substitution** et par **combinaison linéaire**

- *Graphiquement* : On cherche le nombre de solutions du système. S'il y a une solution, on représente dans un repère les deux droites associées au système. Les solutions sont alors les coordonnées des points d'intersection des deux droites.

- *Par substitution* : On exprime x en fonction de y dans la première équation, puis on remplace x dans l'autre équation par l'expression trouvée. On se ramène ainsi à la résolution d'une équation à une inconnue y. Quand on a trouvé y, on calcule alors x grâce à l'expression trouvée.
  Remarque : Les rôles des inconnues sont symétriques, tout comme celui des équations

- *Par combinaison linéaire* : En multipliant les deux équations par des nombres adaptés, on se ramène à un système où le coefficient devant l'inconnue x figure le même coefficient dans les deux équations. On soustrait les équations. On se ramène ainsi à la résolution d'une équation à une inconnue y. Quand on a trouvé y, on la remplace par sa valeur dans l'une des équations. On se ramène ainsi à la résolution d'une équation à une inconnue x. On trouve ainsi x.
  Remarque : Les rôles des inconnues sont symétriques, tout comme celui des équations

Exemples : Cf activité

Exercice 2.3. Trouver le point d'intersection des droites d et d' d'équation respectives $y = 3x + 1$ et $y = -7x + 2$

Exercice 2.4. Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution ou combinaison linéaire :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 6x + y = -6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 3y = 31 \\ 4x + 5y = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ -2x - y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2x - y = -6 \\ 100x - 20y = -240 \end{cases}$$

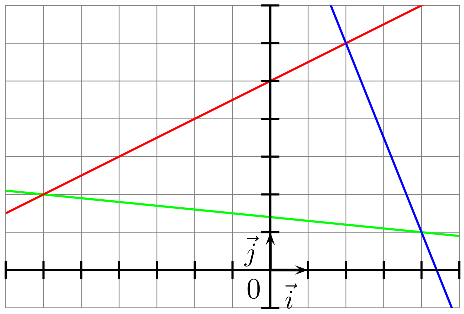
Exercice 2.5. Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x - y = 1 \\ y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -9x + 3y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2.5x - 5y = -200 \\ 10x + 6y = 500 \end{cases}$$

Exercice 2.6. Soient d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques de trois droites d'équations respectives : $d_1 : 5x + 2y = 22$; $d_2 : 2y - x = 10$ et $d_3 : x + 10y = 14$

1. Reconnaître les trois droites sur le graphe ci-dessous.
2. À l'aide du graphique, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 5x+2y=22 \\ y=0.5x+5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0.5x+5=y \\ 10y=14-x \end{cases} ; \quad \begin{cases} y=-2.5x+11 \\ y=-0.1x+14 \end{cases}$$



Exercice 2.7. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -x+3y+4=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+7=2y-3 \\ 4x+3y=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -3x+4y=-10 \\ x+2y=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -4x+7y=-20 \\ 2x+y=1 \\ 6x+2y=6 \end{cases}$$

Exercice 2.8. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $3x+4y-16=0$; $2x-2y+1=0$ et $-x+4y=8$.
Les droites sont-elles concourrantes ?

Exercice 2.9. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x-(6-\sqrt{3})y=2\sqrt{3} \\ x+(1-2\sqrt{3})y=2 \end{cases}$$

Exercice 2.10. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x-6y+12=0 \\ -6x+9y-5=0 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique peut-on donner à ce résultat ? Ne pouvait-on pas le prévoir ?

Exercice 2.11. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x-y+z=1997 \end{cases}$$

Exercice 2.12. Il faut nettoyer les allées d'un espace vert. La remorque tractée du jardinier pèse à vide 50kg. Quand elle est remplie de feuilles, elle pèse 55kg, mais quand elle est remplie de glands, elle pèse 80kg.
Le jardinier a rempli et vidé 10 remorques, ce qui représente une masse totale de 112.5kg de déchets verts.
Quelles sont les masses respectives, exprimées en kg, de feuilles et de glands qu'il a ramassés ?

Exercice 2.13. J'achète 5 tartes et 3 gâteaux pour 52.50 €. Une tarte coûte 1.50 € de moins qu'un gâteau. Trouver le prix d'une tarte et le prix d'un gâteau.

Exercice 2.14. Trouver deux nombres entiers dont la somme vaut 281 et dont la différence vaut 111.

Exercice 2.15. La somme de deux entiers naturels x et y est 157. Dans la division euclidienne de x par y, le quotient vaut 6 et le reste 17. Déterminer x et y.

Exercice 2.16. Ana a 6.50 € de plus que Léa. Elles vont au cinéma puis au snack et dépensent chacune 8.5 €. Il reste alors à Ana le double de ce qu'il reste à Léa. Quelle était au départ la somme de chacune ?

Exercice 2.17. Un marchand a 50 sandwiches et 50 jus. Le matin, il vend 32 sandwiches et 19 jus, ce qui lui rapport 74.10 €. A midi, il vend 15 sandwiches et 20 jus, ce qui lui rapporte 42.50 €.
Quelle sera la recette de sa journée s'il vend tous ses sandwiches et tous ses jus ?

Exercice 2.18. Anaïs compte ses économies composées de billet de 5 € et de pièces de 2 €. Elle a en tout 35 pièces et billets. Au total, elle possède 46 €. Combien de billets et de pièces a-t-elle ?

Exercice 2.19. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 222 m. sachant que la longueur est le triple de la largeur plus 15 m, calculer l'aire du terrain.

Exercice 2.20. Un rectangle a un périmètre de 176 m. En augmentant la longueur de 3 m, l'aire augmente de 105 m^2. Quelles étaient les dimensions du rectangle initial ?

Exercice 2.21. Quand mon père est né, son père avait l'âge de ma mère aujourd'hui.
Si on retranche au carré de l'âge de mon grand-père la somme des carrés des âges de mes parents, on trouve 3034. Quel est l'âge actuel de mon grand-père ?

Exercice 2.22. Charlie est un enfant très gourmand. Pour son anniversaire, il a reçu une boîte de 28 caramels. Chaque jour, il en mange le double de la veille. En trois jours, il a tout mangé.
Combien de caramels Charlie a-t-il mangé le premier jour ?

Exercice 2.23. Un berger a 27 brebis. Toutes meurent sauf 9. Combien en reste-t-il ?

Exercice 2.24. Un petit garçon affirme : “J'ai autant de frères que de soeurs”.
Sa soeur répond : “ j'ai deux fois plus de frères que de soeurs”
Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Exercice 2.25. Un homme et son fils ont 36 ans à eux deux. L'homme a 30 ans de plus que son fils. Quel âge a le fils ?

Exercice 2.26. Dans une pièce, il y a trois ampoules éteintes.
Dans le couloir, il y a les trois interrupteurs qui permettent de les allumer.
Depuis le couloir, il est impossible de voir les ampoules.
On a le droit d'aller une seule fois dans la pièce. Peut-on retrouver quel est l'interrupteur de chaque ampoule ?

Exercice 2.27. Au fond d'un puits de 12 m se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de 3 m. Mais chaque nuit, il glisse de 2 m.
Il commence son ascension de 1er juin à 8 heures.
Quel jour sortira-t-il du puits ?

Exercice 2.28. Soient deux nombres A et B supposés égaux : $A = B$
Multiplions par A : $A^2 = AB$
Retranchons B^2 : $A^2 - B^2 = AB - B^2$
Factorisons : $(A - B)(A + B) = B(A - B)$
Simplifions : $A + B = B$
Comme on a supposé A et B égaux, choisissons $A = B = 1$: $1 + 1 = 1$
D'où : $1 = 2$
Chercher l'erreur !

Exercice 2.29. Dans la famille, chaque frère a au moins une soeur et un frère, et chaque soeur a au moins un frère et une soeur.
Combien y a-t-il d'enfants au minimum dans cette famille ?

Exercice 2.30. Pour nourrir ses 10 animaux, chiens et chats, Adrien utilise 56 croquettes. Chaque chien en mange 6 et chaque chat en mange 5.
Déterminer le nombre de chats que possède Adrien.

Exercice 2.31. Dans un panier, il y a des fruits.
Tous sont des pommes sauf deux. Tous sont des oranges sauf deux. Tous sont des ananas sauf deux.
Combien y a-t-il de fruits dans ce panier ?

Exercice 2.32. Est-il possible de répartir 44 billes dans 10 sacs : 3 rouges et 7 jaunes, de telle sorte que tous les sacs d'une même couleur contiennent le même nombre de billes ?

Exercice 2.33. Monsieur Smith et Monsieur John jouent aux échecs tous les vendredi soirs.
Vendredi dernier, ils jouèrent 7 partie et chacun en remporta autant que l'autre.
Ce soir là, il n'y eut ni match nul, ni pat ... Comment est-ce possible ?

Exercice 2.34. La maîtresse distribue des bons points aux quatre meilleurs élèves de la classe : Vincent, Manuel, Alfred et Milo. Vincent en reçoit autant que Milo, Manuel en obtient trois de plus que Vincent. Alfred en reçoit deux de moins que Manuel. La maîtresse a distribué en tout 32 bons points. Combien de bons points a reçu chacun des enfants ?

Exercice 2.35. A l'école il y a deux horloges. L'une avance de 4 minutes toutes les heures et l'autre retarde d'une minute toutes les heures. Le directeur les a mises à l'heure hier et maintenant l'une marque 17h36 et l'autre 15h36. Quelle heure est-il ?

Les Annexes

Caractérisation analytique d'une droite

Définition 1. *Caractériser une droite $\mathcal{D}$ consiste à établir une relation entre les coordonnées x et y d'un point M de telle sorte que :*

- *Si M appartient à la droite $\mathcal{D}$, alors les coordonnées de M vérifient cette relation,*
- *Si les coordonnées de M vérifient cette relation, alors le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$*

Exemple : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(-1;1)$ et $B(2;2)$.

1. **Caractérisation de la droite** (AB) : Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces vecteurs pour qu'un point $M(x;y)$ du plan soit situé sur la droite (AB).
   (c) Traduire cette condition par une relation sur les coordonnées de ces vecteurs.
   (d) Écrire cette relation sous la forme $y = mx + p$
   On appelle équation réduite de la droite (AB) la relation $y = mx + p$ qui la caractérise.
2. (a) Tracer le repère et la droite (AB)
   (b) Graphiquement, dire si les points $C(5;3)$ et $D(0;1.3)$ semblent appartenir à (AB).
   (c) Par une méthode de calcul vue au collège, retrouver le coefficient directeur m de la droite (AB) et son ordonnée à l'origine p.
   (d) Vérifier par le calcul la question 2.
3. Soit Δ la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B.
   (a) La tracer.
   (b) Dire si les points $G(-3;2.0001)$, $H(0;\sqrt{4})$, $I(7656;2)$ et $J(2;6)$ appartiennent à Δ
   (c) i. Donner une équation de la droite Δ
   ii. Dire si Δ est la courbe représentative d'une fonction affine et si oui de laquelle.
4. Soit Δ' la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par B
   (a) La tracer
   (b) Dire si les points G, H, J et $K(2.001;6345)$ appartiennent à Δ'
   (c) i. Donner une équation de la droite Δ'
   ii. Dire si Δ' est la courbe représentative d'une fonction affine et si oui de laquelle.
5. (À faire plus tard) On considère l'équation (E) : $-x + 3y = 4$
   (a) Parmi les couples couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de (E) :

   $(-1;1)$ $\quad$ $(3;-5)$ $\quad$ $(5;3)$ $\quad$ $(2;2)$ $\quad$ $(0;1.3)$

   (b) Montrer que l'équation (E) est celle de la droite (AB).
   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E). Comment les caractériser ?

TP Informatique sur Géoplan

Partie A : Équation réduite d'une droite

1. (a) Faire apparaître le repère dans Géoplan en cliquant sur l'îcone appropriée
   (b) A l'aide de la boîte de style, faire apparaître le quadrillage
   (c) Créer le point $A(4;3)$
   (d) Créer le point B, libre dans le plan (on pourra le déplacer) à coordonnées entières
   (e) Créer la droite (AB)
2. (a) Déplacer le point B sur l'axe des abscisses.
   (b) Indiquer une position particulière de la droite (AB) : ....
   (c) Faire afficher à l'écran l'équation réduite de la droite (AB), à deux décimales près.
   (d) Déplacer le point B sur l'axe des abscisses et compléter le tableau ci-dessous :

x_n	-1	0	1	2	3	4	5
Equation Réduite de la droite (AB)							

3. (a) Déplacer le point B sur l'axe des ordonnées.
   (b) Indiquer une position particulière de la droite (AB) : ....
   (c) Déplacer le point B sur l'axe des ordonnées et compléter le tableau ci-dessous :

y_n	-2	-1	0	1	2	3	4
Equation Réduite de la droite (AB)							

Partie B : Droites parallèles

1. Créer le point C de coordonnées $(0;b)$ où b est un entier quelconque compris entre -3 et 3
2. Créer la droite d passant par C et parallèle à la droite (AB)
3. Créer l'affichage à l'écran de l'équation réduite de la droite d avec 2 décimales
4. Déplacer le point B dans le plan et compléter le tableau ci-dessous :

Coordonnées du point B	$(1;3)$	$(0;-2)$	$(0;0)$	$(2;0)$	$(-4;1)$	$(-6;-2)$	$(-1;2)$
Equation Réduite de la droite (AB)							
Equation Réduite de la droite d							

5. Comparer les équations réduites des droites (AB) et d. Que constate-t-on ? ....
   ....

Partie C : Intersection de deux droites

1. Créer la droite d' passant par C et ayant pour coefficient directeur 1.5
2. Faire bouger la droite d' en pilotant la variable b au clavier
3. Comment se déplace la droite d' ? ....
4. Le point d'intersection I des droites (AB) et d' existe-t-il toujours ? ....
5. Créer ce point et afficher ses coordonnées à l'écran avec 5 décimales.
6. Compléter le tableau ci-dessous :

Equation réduite de la droite (AB)	$y = x - 1$	$y = x - 1$	$y = x - 1$	$y = x - 1$	$y = x - 1$	$y = x - 1$	$y = x - 1$
Equation réduite de la droite d'	$y = 1.5x + 3$	$y = 1.5x + 2$	$y = 1.5x + 1$	$y = 1.5x$	$y = 1.5x - 1$	$y = 1.5x - 2$	$y = 1.5x - 3$
Coordonnées du point I							

7. Faire bouger la droite d' en pilotant b au clavier et B sur l'axe des abscisses en utilisant la souris
8. Indiquer les positions particulières des droites (AB) et d'. ....
9. Le point I existe-t-il toujours ? ....
10. Compléter le tableau ci-dessous :

Equation réduite de la droite (AB)	$y = 0.75x$	$y = 1.5x - 3$	$y = -1.5x + 9$	$y = 0.3x + 1.8$	$x = 4$	$y = -3x + 15$
Equation réduite de la droite d'	$y = 1.5x + 3$	$y = 1.5x + 2$	$y = 1.5x$	$y = 1.5x - 1$	$y = 1.5x - 2$	$y = 1.5x - 3$
Coordonnées du point I						

Partie D : Systèmes linéaires

Un système d'équations linéaires à deux inconnues peut s'écrire $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples de réels $(x; y)$ vérifiant les DEUX équations.

Interprétation graphique : Résoudre le système revient à déterminer les coordonnées des éventuels points communs aux deux droites d'équation $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$

1. Créer un nouvelle figure, faire apparaître le repère et le quadrillage.
2. En interprétant graphiquement chacune des équations, justifier le nombre de solutions des systèmes d'équations linéaires suivants, puis les résoudre graphiquement :

   (a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 1.5x - y = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 0.75x - 0.5y = 1 \end{cases}$

3. Soient les tableaux $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0.75 & -0.5 \end{pmatrix}$. Quel rapport ont-ils avec les systèmes précédents ?
4. Lesquels sont des tableaux de proportionnalité ?
5. Quels tableaux pourraient-on créer pour différencier facilement les deux derniers systèmes ?

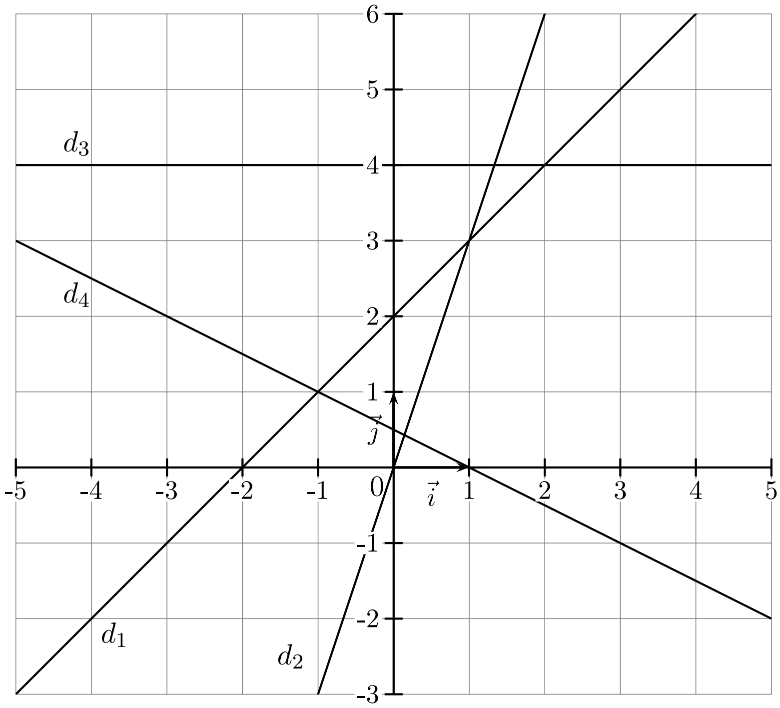
Fiche d'Exercices 1

Exercice 1.1. Soient trois points $E(-2;3)$, $D(-2;-1)$ et $F(4;-1)$. Donner les équations des droites (EF), (DE) et (DF).

Exercice 1.2. Construire dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ les droites déquation : $d_1 : y = 3x+2$, $d_2 : y = \frac{1}{3}x+4$, $d_3 : y = -3x-1$, $d_4 : y = 3$ et $d_5 : x = 3$.

Exercice 1.3. Construire dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x-3$, $g(x) = -\frac{1}{4}x+1$, $h(x) = -5$ et $i(x) = \frac{3}{5}x$.

Exercice 1.4. Donner les équations réduites de chacune des droites représentées ci-dessous.



Exercice 1.5. Parmi les droites suivantes, lesquelles sont parallèles ?

- (AB) où $A(2;-1)$ et $B(1;1)$
- D passant par $C(1;-2)$ et de coefficient directeur 3
- Δ d'équation $= -2x+3$

Exercice 1.6. Soient la droite $d : y = -3x+4$ et le point $A(-2;5)$. Déterminer l'équation de la droite d' parallèle à d et passant par A.

Exercice 1.7.

1. Soit $\Delta : y = 2x+3$. Déterminer une équation de la droite D parallèle à Δ et passant par $A(1;3)$
2. Soient $D(5;3)$, $E(0;-5)$ et $F(-2;2)$. Déterminer une équation de la droite passant par F et parallèle à (DE).

Exercice 1.8. On considère les équations $(F) : x + 2y = 5$, $G : 2x + 0y = 4$ et $H : 0x + 2y = 2$

1. Représenter les droites associées à ces équations dans un repère orthognal.
2. En déduire le nombre et l'ensemble de solutions de chacune.

Exercice 1.9. Le couple $(2; -3)$ est-il solution du système $S : \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Exercice 1.10. Trouver le nombre de couples solutions des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + y = -1 \\ -10x - 5y = -5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

Exercice 1.11. Trouver le point d'intersection des droites d et d' d'équation respectives $y = 3x + 1$ et $y = -7x + 2$

Exercice 1.12. Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution ou combinaison linéaire :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 6x + y = -6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 3y = 31 \\ 4x + 5y = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ -2x - y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2x - y = -6 \\ 100x - 20y = -240 \end{cases}$$

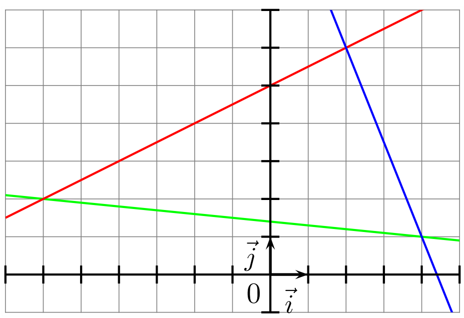
Exercice 1.13. Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x - y = 1 \\ y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -9x + 3y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2.5x - 5y = -200 \\ 10x + 6y = 500 \end{cases}$$

Exercice 1.14. Soient d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques de trois droites d'équations respectives : $d_1 : 5x + 2y = 22$; $d_2 : 2y - x = 10$ et $d_3 : x + 10y = 14$

1. Reconnaître les trois droites sur le graphe ci-dessous.
2. À l'aide du graphique, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 \\ y = 0.5x + 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0.5x + 5 = y \\ 10y = 14 - x \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = -2.5x + 11 \\ y = -0.1x + 14 \end{cases}$$



Exercice 1.15. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 2y - 3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + 7 = 2y - 3 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -3x + 4y = -10 \\ x + 2y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -4x + 7y = -20 \\ 2x + y = 1 \\ 6x + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercice 1.16. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $3x+4y-16=0$; $2x-2y+1=0$ et $-x+4y=8$.
Les droites sont-elles concourrantes ?

Exercice 1.17. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x-(6-\sqrt{3})y=2\sqrt{3} \\ x+(1-2\sqrt{3})y=2 \end{cases}$$

Exercice 1.18. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x-6y+12=0 \\ -6x+9y-5=0 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique peut-on donner à ce résultat ? Ne pouvait-on pas le prévoir ?

Exercice 1.19. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x-y+z=1997 \end{cases}$$

Exercice 1.20. Il faut nettoyer les allées d'un espace vert. La remorque tractée du jardinier pèse à vide 50kg. Quand elle est remplie de feuilles, elle pèse 55kg, mais quand elle est remplie de glands, elle pèse 80kg.
Le jardinier a rempli et vidé 10 remorques, ce qui représente une masse totale de 112.5kg de déchets verts.
Quelles sont les masses respectives, exprimées en kg, de feuilles et de glands qu'il a ramassés ?

Exercice 1.21. J'achète 5 tartes et 3 gâteaux pour 52.50 €. Une tarte coûte 1.50 € de moins qu'un gâteau. Trouver le prix d'une tarte et le prix d'un gâteau.

Exercice 1.22. Trouver deux nombres entiers dont la somme vaut 281 et dont la différence vaut 111.

Exercice 1.23. La somme de deux entiers naturels x et y est 157. Dans la division euclidienne de x par y, le quotient vaut 6 et le reste 17. Déterminer x et y.

Exercice 1.24. Ana a 6.50 € de plus que Léa. Elles vont au cinéma puis au snack et dépensent chacune 8.5 €. Il reste alors à Ana le double de ce qu'il reste à Léa. Quelle était au départ la somme de chacune ?

Exercice 1.25. Un marchand a 50 sandwiches et 50 jus. Le matin, il vend 32 sandwiches et 19 jus, ce qui lui rapport 74.10 €. A midi, il vend 15 sandwiches et 20 jus, ce qui lui rapporte 42.50 €.
Quelle sera la recette de sa journée s'il vend tous ses sandwiches et tous ses jus ?

Exercice 1.26. Anaïs compte ses économies composées de billet de 5 € et de pièces de 2 €. Elle a en tout 35 pièces et billets. Au total, elle possède 46 €. Combien de billets et de pièces a-t-elle ?

Exercice 1.27. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 222 m. sachant que la longueur est le triple de la largeur plus 15 m, calculer l'aire du terrain.

Exercice 1.28. Un rectangle a un périmètre de 176 m. En augmentant la longueur de 3 m, l'aire augmente de 105 m^2. Quelles étaient les dimensions du rectangle initial ?

Exercice 1.29. Quand mon père est né, son père avait l'âge de ma mère aujourd'hui.
Si on retranche au carré de l'âge de mon grand-père la somme des carrés des âges de mes parents, on trouve 3034. Quel est l'âge actuel de mon grand-père ?

Exercice 1.30. Charlie est un enfant très gourmand. Pour son anniversaire, il a reçu une boîte de 28 caramels. Chaque jour, il en mange le double de la veille. En trois jours, il a tout mangé.
Combien de caramels Charlie a-t-il mangé le premier jour ?

Exercice 1.31. Un berger a 27 brebis. Toutes meurent sauf 9. Combien en reste-t-il ?

Exercice 1.32. Un petit garçon affirme : "J'ai autant de frères que de soeurs".
Sa soeur répond : " j'ai deux fois plus de frères que de soeurs"
Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Exercice 1.33. Un homme et son fils ont 36 ans à eux deux. L'homme a 30 ans de plus que son fils.
Quel âge a le fils ?

Exercice 1.34. Dans une pièce, il y a trois ampoules éteintes.
Dans le couloir, il y a les trois interrupteurs qui permettent de les allumer.
Depuis le couloir, il est impossible de voir les ampoules.
On a le droit d'aller une seule fois dans la pièce. Peut-on retrouver quel est l'interrupteur de chaque ampoule ?

Exercice 1.35. Au fond d'un puits de 12 m se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de 3 m. Mais chaque nuit, il glisse de 2 m.
Il commence son ascension de 1er juin à 8 heures.
Quel jour sortira-t-il du puits ?

Exercice 1.36. Soient deux nombres A et B supposés égaux : $A = B$
Multiplions par A : $A^2 = AB$
Retranchons B^2 : $A^2 - B^2 = AB - B^2$
Factorisons : $(A - B)(A + B) = B(A - B)$
Simplifions : $A + B = B$
Comme on a supposé A et B égaux, choisissons $A = B = 1$: $1 + 1 = 1$
D'où : $1 = 2$
Chercher l'erreur !

Exercice 1.37. Dans la famille, chaque frère a au moins une soeur et un frère, et chaque soeur a au moins un frère et une soeur.
Combien y a-t-il d'enfants au minimum dans cette famille ?

Exercice 1.38. Pour nourrir ses 10 animaux, chiens et chats, Adrien utilise 56 croquettes. Chaque chien en mange 6 et chaque chat en mange 5.
Déterminer le nombre de chats que possède Adrien.

Exercice 1.39. Dans un panier, il y a des fruits.
Tous sont des pommes sauf deux. Tous sont des oranges sauf deux. Tous sont des ananas sauf deux. Combien y a-t-il de fruits dans ce panier ?

Exercice 1.40. Est-il possible de répartir 44 billes dans 10 sacs : 3 rouges et 7 jaunes, de telle sorte que tous les sacs d'une même couleur contiennent le même nombre de billes ?

Exercice 1.41. Monsieur Smith et Monsieur John jouent aux échecs tous les vendredi soirs.
Vendredi dernier, ils jouèrent 7 partie et chacun en remporta autant que l'autre.
Ce soir là, il n'y eut ni match nul, ni pat ... Comment est-ce possible ?

Exercice 1.42. La maîtresse distribue des bons points aux quatre meilleurs élèves de la classe : Vincent, Manuel, Alfred et Milo. Vincent en reçoit autant que Milo, Manuel en obtient trois de plus que Vincent. Alfred en reçoit deux de moins que Manuel. La maîtresse a distribué en tout 32 bons points. Combien de bons points a reçu chacun des enfants ?

Exercice 1.43. A l'école il y a deux horloges. L'une avance de 4 minutes toutes les heures et l'autre retarde d'une minute toutes les heures. Le directeur les a mises à l'heure hier et maintenant l'une marque 17h36 et l'autre 15h36. Quelle heure est-il ?

Méthodes

Méthodes pour déterminer une équation de droite par le calcul :

1. Si on connaît deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la droite d :
   - On calcule le coefficient directeur de la droite grâce à la propriété

$$m = \frac{\text{Différence des } y}{\text{Différence des } x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

   - On remplace m par sa valeur trouvée dans l'équation $y = mx + p$,
   - Or A appartient à d, donc ses coordonnées vérifient l'équation de d.
     On remplace dans l'équation de la droite x et y par les coordonnées de A : $y_A = mx_A + p$ (on peut faire de même avec le point B).
   - On détermine alors p grâce à cette dernière équation.
2. Si on connaît un point $A(x_A; y_A)$ de la droite d et un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$:
   - On pose $M(x; y)$ un autre point de la droite d
   - Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)$ et $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ sont colinéaires, on en déduit que leurs coordonnées sont proportionnelles :

$$(x_M - x_A) \times y_{\vec{u}} = (y_M - y_A) \times x_{\vec{u}}$$

   - On écrit cette relation sous la forme $y = mx + p$ ou $x = c$.

Méthodes pour tracer la représentation graphique d'une droite dont on a l'équation :

1. On détermine les coordonnées de deux points appartenant à la droite, on les place sur le graphique puis on les relie.
2. Sans calculer de coordonnées :
   - On place sur l'axe des ordonnées le point de coordonnée $(0; p)$, p étant l'ordonnées à l'origine de la droite,
   - On construit un deuxième point en utilisant le coefficient directeur de la droite.
3. Si l'équation est du type $x = c$, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par n'importe quel point d'abscisse c, par exemple le point de coordonnées $(c; 0)$

Résoudre un système linéaire à deux inconnues

1. **Méthode par substitution :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$

   (a) Exprimer à l'aide de la première équation y en fonction de x.

   (b) Remplacer dans la deuxième équation y par l'expression obtenue.

   (c) Déterminer x, puis en déduire y.

   (d) Écrire l'ensemble des solutions

   Remarques :

   – Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut exprimer x en fonction de y à la $1^{\text{ère}}$ étape)

   – Les rôles des équations sont symétriques (on peut utiliser la $2^{\text{ème}}$ équation dans la $1^{\text{ère}}$ étape)

2. **Méthode par combinaison linéaire :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 7y = -6 \end{cases}$

   (a) Multiplier la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ ligne par des nombres appropriés afin de faire apparaître des coefficients opposés devant le x

   (b) Additionner les deux lignes

   (c) On a obtenu une seule équation à d'inconnue y. Déterminer y

   (d) Remplacer y par sa valeur trouvée dans l'une des équations

   (e) On a obtenu une seule équation d'inconnue x. Déterminer x

   (f) Écrire l'ensemble des solutions.

   Remarques :

   – Après avoir trouver x, on peut refaire une combinaison linéaire pour trouver y

   – Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut travailler sur les coefficients de y)

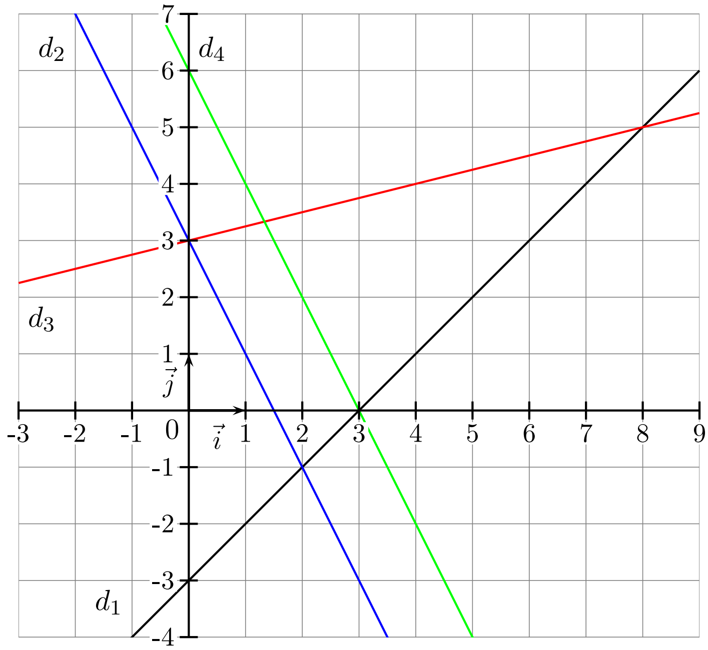
Devoir Surveillé 6 : 1h

Exercice 2.1. (1 point)
Le périmètre d'un rectangle est de 144 cm. La largeur vaut les $\frac{3}{5}$ de la longueur. Quelle est l'aire de ce rectangle ? (Justifier la réponse)

Exercice 2.2. (2 points)
La maîtresse distribue des bons points aux quatre meilleurs élèves de la classe : Vincent, Manuel, Alfred et Milo. Vincent en reçoit autant que Milo, Manuel en obtient trois de plus que Vincent. Alfred en reçoit deux de moins que Manuel. La maîtresse a distribué en tout 32 bons points. Combien de bons points a reçu chacun des enfants ? (Justifier la réponse)

Exercice 2.3. (2 points)
Soient les points $A(5;-3)$, $D(-1;2)$ et $U(-2;-4)$ dansun repère du plan. Trouver l'équation de la droite d, parallèle à la droite (AD) et passant par U.

Exercice 2.4. (7 points) Résolution graphique



1. A l'aide du graphique précédent, et en expliquant la démarche, trouver les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation : $y = 3 - 2x$ et $y = x - 3$
2. Résoudre à l'aide du graphique les systèmes suivants, en détaillant la méthode :

$$S_1 : \begin{cases} x - y = 3 \\ y = \dfrac{x}{4} + 3 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 4y = 12 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} 2x - 8y = 3(1 - 3y) \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

Exercice 2.5. (8 points)
Résoudre par substitution ou combinaison linéaire les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$:

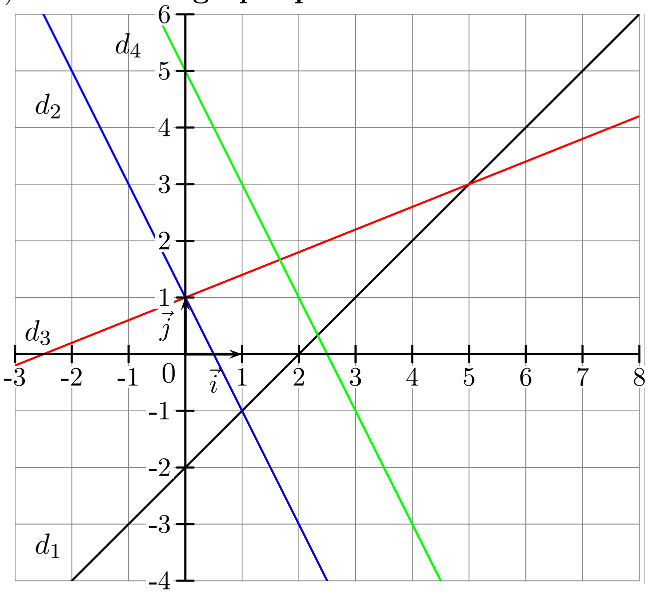
$$S_4 : \begin{cases} 4x - y = 5 \\ -3x + y = -4 \end{cases} \qquad S_5 : \begin{cases} -2x + 3y = -6 \\ 7x - 3y = 21 \end{cases} \qquad S_6 : \begin{cases} 5x - 8y = 7 \\ \dfrac{15}{2}x - 12y = -\dfrac{21}{2} \end{cases} \qquad S_7 : \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$$

Devoir Surveillé 6 : 1h

Exercice 2.1. (2 points) **On justifiera la réponse**

Un fleuriste vend des roses à 0.80 € l'une et des tulipes à 0.60 € l'une. Il avait 45 roses de plus que de tulipes. La recette a été de 211 €. Combien de fleurs de chaque sorte ont été vendues ?

Exercice 2.2. (7 points) **Résolution graphique**



1. A l'aide du graphique précédent, et en expliquant la démarche, trouver les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation : $y = 5 - 2x$ et $y = x - 2$
2. Résoudre à l'aide du graphique les systèmes suivants, en détaillant la méthode :

$$S_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ y = \dfrac{2}{5}x + 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + 5y = 5 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} 3x + 3y = x + 2y + 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

Exercice 2.3. (9 points) Résoudre par substitution ou combinaison linéaire les systèmes suivants :

$$S_4 : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases} \qquad S_5 : \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y = 2 \end{cases} \qquad S_6 : \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ x + 2y = 6 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases} \qquad S_7 : \begin{cases} 4x - \sqrt{2}y = 12 \\ 2x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y = 6 \end{cases}$$

Exercice 2.4. (2 points) A l'aide de changements de variables dans le système S_4, résoudre les systèmes suivants :

$$S_8 : \begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{y} = 3 \end{cases} \qquad S_9 : \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 \\ \\ 5x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$$

Exercice 2.5. Bonus (2 points) Résoudre le système d'équations suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Correction DS 6

Exercice 2.1. On appelle la largeur et la longueur du rectangle respectivement l et L. On a alors :

$$\begin{cases} 2(l+L) = 144 \\ l = \frac{3}{5}L \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{5}L + L = 72 \\ l = \frac{3}{5}L \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{8}{5}L = 72 \\ l = \frac{3}{5}L \end{cases} \iff \begin{cases} L = 45 \\ l = \frac{3}{5} \times 45 \end{cases} \iff \begin{cases} L = 45 \\ l = 27 \end{cases}$$

Donc l'aire du rectangle vaut $Aire = L \times l = 1215$ cm^2.

Exercice 2.2. On appelle x le nombre de bons points reçu par Vincent. Alors Milo en a reçu x aussi, Manuel en a reçu $x+3$ et Alfred en a reçu $x+3-2 = x+1$.

De plus, on sait que $x + x + x + 3 + x + 1 = 32 \Leftrightarrow 4x = 28 \Leftrightarrow x = 7$.

Finalement,Vincent et Milo ont obtenu chacun 7 bons points, Manuel en a obtenu 10 et Alfred 9.

Exercice 2.3. Le coefficient directeur de la droite (AD) est $m = \dfrac{2-(-3)}{-1-5} = \dfrac{5}{-6}$.

On sait que d est parallèle à (AD) donc les droites ont le même coefficient directeur $m = -\dfrac{5}{6}$.

On sait de plus que $U \in d$ donc $y_U = mx_U + p \Leftrightarrow -4 = -2 \times \left(-\dfrac{5}{6}\right) + p \Leftrightarrow -4 = \dfrac{5}{3} + p \Leftrightarrow p = -\dfrac{17}{3}$.

Donc on a $d : y = -\dfrac{5}{6}x - \dfrac{17}{3}$.

Exercice 2.4.

1. On reconnaît $d_2 : y = 3 - 2x$ et $d_1 : y = x - 3$. Elles se coupent en $(2; -1)$.
2. $S_1 : \begin{cases} x - y = 3 \\ y = \frac{x}{4} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{x}{4} + 3 \end{cases}$ On reconnaît les équations réduites des droites d_1 et d_3.
   L'unique solution du système est le couple de coordonnées de leur point d'intersection. $\mathcal{S} = \{(8; 5)\}$
   $S_2 : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = \frac{1}{4} + 3 \end{cases}$ On reconnaît les équations réduites des droites d_2 et d_3.
   L'unique solution du système est le couple de coordonnées de leur point d'intersection. $\mathcal{S} = \{(0; 3)\}$
   $S_3 : \begin{cases} 2x - 8y = 3(1 - 3y) \\ 4x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y = 3 - 9y \\ y = 6 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 6 - 2x \end{cases}$ On reconnaît les équations réduites de d_2 et d_4. Ces droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles, mais pas la même ordonnée à l'origine, elles sont donc strictement parallèles. On a $\mathcal{S} = \varnothing$

Exercice 2.5.

$$S_4 : \begin{cases} 4x - y = 5 \\ -3x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 5 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \times 1 - y = 5 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \{(1; -1)\}$$

$$S_5 : \begin{cases} -2x + 3y = -6 \\ 7x - 3y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -6 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \times 3 + 3y = -6 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \{(3; 0)\}$$

$$S_6 : \begin{cases} 5x - 8y = 7 \\ \frac{15}{2}x - 12y = -\frac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 24y = 21 \\ -15x + 24y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 24y = 21 \\ 0 = 21 \end{cases}$$

On remarque les deux équations du système sont impossible à vérifier en même temps. Alors $\mathcal{S} = \varnothing$

$$S_7 : \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ -2x + y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$$

On remarque les deux équations du système sont équivalentes. On a alors : $\mathcal{S} = \{(x; 2x - 6)\,;\ \text{quand } x \in \mathbb{R}\}$

Correction DS 6

Exercice 2.1. (2 points)
On appelle x le nombre de roses vendues et y le nombre de tulipes vendues. On doit alors résoudre :

$$\begin{cases} x = 45 + y \\ 0.8x + 0.6y = 211 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 + y \\ 0.8(45 + y) + 0.6y = 211 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 + y \\ 36 + 1.4y = 211 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 + y \\ y = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 170 \\ y = 125 \end{cases}$$

Le fleuriste a vendues 170 roses et 125 tulipes.

Exercice 2.2.

1. On reconnaît $d_4 : y = 5 - 2x$ et $d_1 : y = x - 2$. Leur point d'intersection est environ $(2.3; 0.3)$.
2. $S_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ y = \dfrac{2}{5}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = \dfrac{2}{5}x + 1 \end{cases}$ On reconnaît les équations réduites des droites d_1 et d_3.
L'unique solution du système est le couple de coordonnées de leur point d'intersection. $\mathcal{S} = \{(5; 3)\}$
$S_2 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = 1 + \dfrac{2}{5}x \end{cases}$ On reconnaît les équations réduites des droites d_2 et d_3.
L'unique solution du système est le couple de coordonnées de leur point d'intersection. $\mathcal{S} = \{(0; 1)\}$
$S_3 : \begin{cases} 3x + 3y = x + 2y + 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = 5 - 2x \end{cases}$ On reconnaît les équations réduites des droites d_2 et d_4. Ces droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèlesn mais pas la même ordonnée à l'origine, elles sont donc strictement parallèles. $\mathcal{S} = \varnothing$

Exercice 2.3.

$$S_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 6 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \{(3; -4)\}$$

$$S_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \{(0; -6)\}$$

Pour $\mathcal{S}_6$, on résoud d'abord par exemple :

$$\begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ 5x + 10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ -17y = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Or $3x - 5y = 6 - 10 = -4 \neq 7$. Donc $\mathcal{S} = \varnothing$

$S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \sqrt{2}y = 12 \\ 4x - \dfrac{2}{\sqrt{2}}y = 12 \end{cases}$ On remarque les deux équations du système sont équivalentes car $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

On a alors : $\mathcal{S} = \left\{\left(x; \sqrt{2}(2x - 6)\right) ; \text{ quand } x \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 2.4. On fait les changements de variables $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$ dans S_8. Alors

$S_8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = 2 \\ 5X + 3Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 3 \\ \frac{1}{y} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$ Donc $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

On fait les changements de variables $X = x^2$ et $Y = y^2$ dans S_9.

Alors $S_9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = 2 \\ 5X + 3Y = 3 \end{cases}$ D'après l'exercice 2.3, les solutions sont $X = 3$ et $Y = -4$. Or $y^2 = -4$ est impossible.

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$