Chapitre 7 : Fonctions de référence

C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 6 mai 2009

Table des matières

Cours : Fonctions de référence

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1 Objectifs

Le but de ce chapitre est d'étudier en détails des fonctions dites de référence. Il sera utile dans les années à venir de connaître par coeur leurs propriétés ainsi que l'allure de leur courbe représentative, afin de pouvoir étudier rapidement des fonctions plus compliquées, composées de fonctions référence vues dans ce chapitre.

Avant d'étudier ces fonctions en détails, nous allons (re)voir la notion de parité.

Définition 1. Soit f une fonction définie sur D_f un intervalle symétrique par rapport à 0. On dit que f est **paire** ssi pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = f(-x)$.

Exemple : Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2$ est une fonction paire.

Propriété 1. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Définition 2. Soit f une fonction définie sur D_f un intervalle symétrique par rapport à 0. On dit que f est **impaire** ssi pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = -f(-x)$.

Exemple : Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^3$ est une fonction impaire.

Remarque : Si f est une fonction impaire et que $0 \in D_f$, on a toujours $f(-0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$.

Propriété 2. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire possède l'origine du repère comme centre de symétrie.

Ainsi, lorsque nous auront une fonction (im)paire à étudier, nous pourrons nous restreindre à “ la moitié ” de son ensemble de définition, et par symétrie, connaître les propriétés de la fonction sur son ensemble de définition entier.

Une démarche scientifique pour étudier une fonction

Pour étudier une fonction, on suivra la démarche scientifique suivante :

1. **Ensemble de définition**
   - L'expression de la fonction contient-elle un quotient ou une racine ?
   - Si oui, quelles sont les valeurs interdites ?
   - L'ensemble de définition de la fonction est $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites trouvées
2. **Parité :**
   - La fonction f est-elle définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 ?
   - Si oui, que vaut $f(-x)$?
   - Quelle symétrie aura la représentation graphique de f
3. **Sens de variation**
   - Sur quel intervalle la fonction est-elle croissante ? Décroissante ?
   - Dresser son tableau de variations
   - A partir de ce tableau, dire si la fonction a des extrema ?
4. **Représentation graphique**
   - Faire un tableau de valeur
   - Choisir une échelle appropriée
   - Tracer la courbe (lissage)

2 Fonction carrée

2.1 Définition

Définition 3. On appelle fonction carrée la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Propriété 3. La fonction carrée ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2.2 Parité

Propriété 4. La fonction carrée est paire.

Preuve : La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$, domaine centré en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
Donc la fonction carrée est paire.

Conséquence : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

2.3 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 5. La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Preuve : Soient a et b deux réels de $[0; +\infty[$ tels que $a < b$. Alors

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

Donc la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Comme la fonction carrée est paire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty : 0]$.
On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Remarque : La décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty; 0]$ permet de retrouver le fait que deux nombres sont négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

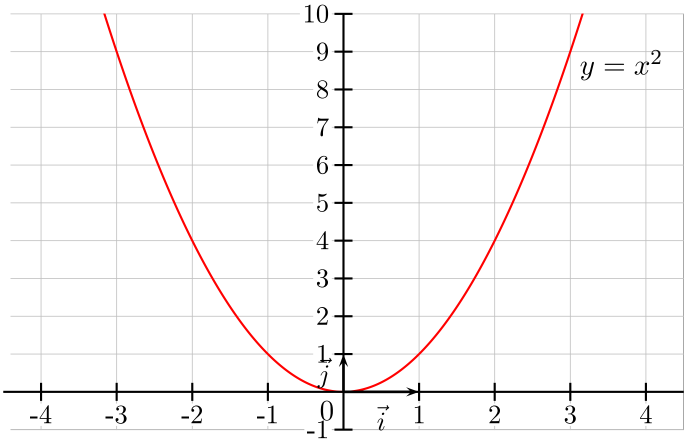
2.4 Courbe représentative

Définition 4. Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** de sommet l'origine du repère.

On esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

On trace le restant de la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



Exercice 2.1. On considère la fonction g définie par $g(x) = -x^2$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}^-$.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction g.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 2.2. Même exercice que précédemment, avec la fonction h définie pas $h(x) = x^2 + 1$ et la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2.3. Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)^2$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 1]$.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
6. Résoudre graphiquement $f(x) = 2$, $f(x) < -1$ et $a(x) \geq 4$

Exercice 2.4. Soit a la fonction définie par $a(x) = x^2 + 4x + 14$.

1. Déterminer D_a.
2. Etudier la parité de la fonction a.
3. Montrer que $a(x) = (a + 2)^2 + 10$ pour tout $x \in D_a$
4. Déterminer le sens de variation de a sur $[-2; +\infty[$, puis sur $]-\infty; -2]$.
5. Etablir le tableau de variations de la fonction a.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction a.
7. Résoudre graphique $a(x) = 2$, $a(x) < 15$ et $a(x) \geq 19$

3 Fonction cube

3.1 Définition

<u>Définition</u> 5. On appelle fonction cube la fonction définie par $f(x) = x^3$.

Propriété 6. La fonction cube ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

3.2 Parité

Propriété 7. La fonction cube est impaire.

<u>Preuve</u> : La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$, domaine centré en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
Donc la fonction cube est impaire.

<u>Conséquence :</u> Dans un repère orthogonale, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère. On peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

3.3 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 8. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> : Soient a et b deux réels de $[0; +\infty[$ tels que $a < b$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, il vient $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. En multipliant membre à membre les inégalités à termes positifs $a < b$ et $a^2 < b^2$, on obtient $a^3 < b^3$. Donc la fonction cube est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Comme la fonction cube est impaire, elle est strictement croissante sur $] - \infty : 0]$ et donc sur $\mathbb{R}$.
On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction cube :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

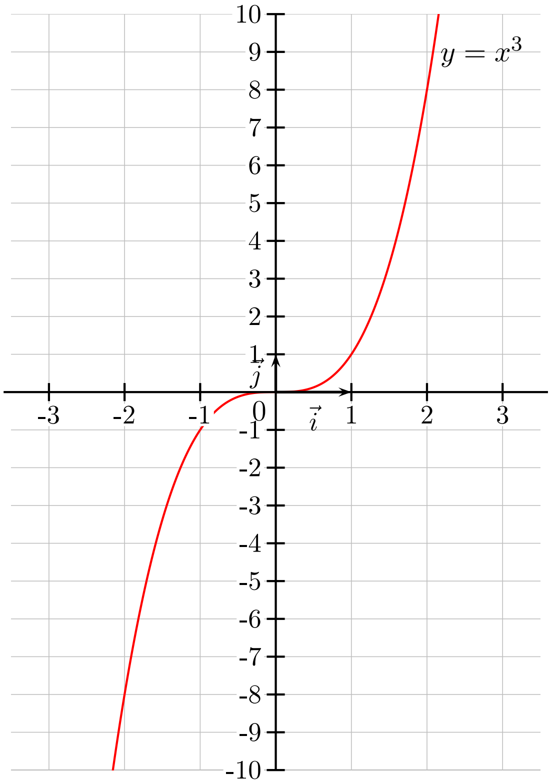
D'après le tableau de variations, la fonction cube n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.

3.4 Courbe représentative

Dans un repère orthogonal du plan, on esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction cube sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8	$\frac{125}{8}$	27

On trace le restant de la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.



<u>Exercice</u> 3.1.

1. Sur votre calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ et $f_3 : x \mapsto x^3$ définies sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant le graphique, ranger dans l'ordre croissant x, x^2 et x^3 pour x positif.

4 Fonction inverse

4.1 Définition

Définition 6. On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 9. La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que $x \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

4.2 Parité

Propriété 10. La fonction inverse est impaire.

Preuve : La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, domaine centré en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.
Donc la fonction inverse est impaire.

Conséquence : Dans un repère orthogonale, la courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère. On peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

4.3 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 11. La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Preuve : Soient a et b deux réels de $]0; +\infty[$ tels que $a < b$. On sait du chapitre sur l'ordre que $a < b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$. Donc la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Comme la fonction inverse est impaire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty : 0[$.
On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque : La décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty;0[$ permet de retrouver le fait que deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

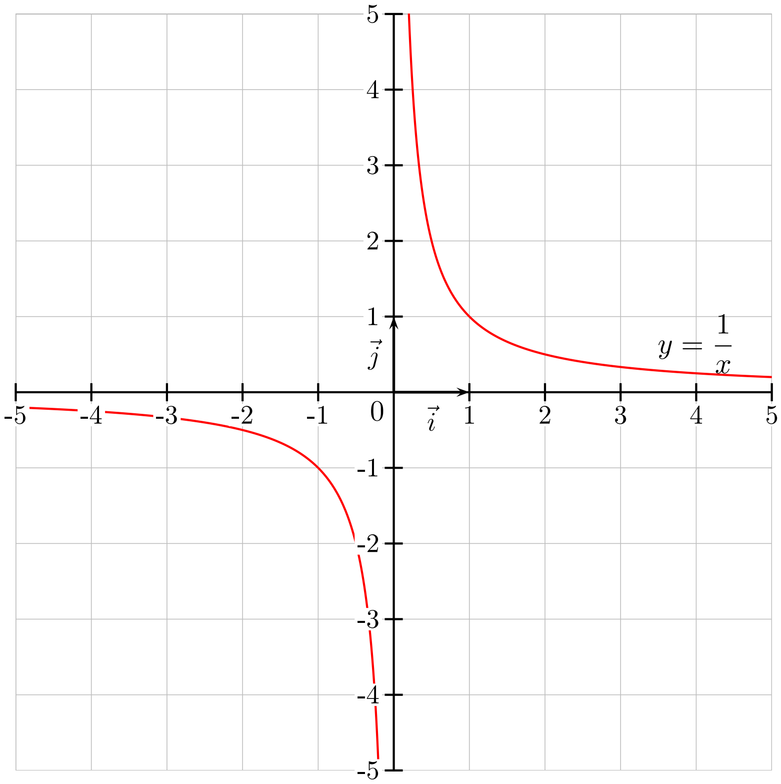
4.4 Courbe représentative

Définition 7. Dans un repère orthogonal, la courbe repésentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

On esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

On trace le restant de la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.



Exercice 4.1. Soit f la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$, puis sur $]-\infty;0[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4.2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer D_g.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Déterminer le sens de variation de g sur $]-1;+\infty[$, puis sur $]-\infty;-1[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

5 Fonction racine carrée

5.1 Définition

Définition 8. On appelle fonction racine carrée la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriété 12. La fonction racine carré possède une racine mais pas de quotient. Sa racine existe dès que $x \geq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^+$.

5.2 Parité

Propriété 13. La fonction racine carrée n'est ni paire ni impaire.

Preuve : La fonction racine carrée n'est pas définie sur un domaine centré en 0. En effet, $1 \in R^+$ mais $-1 \notin R^+$
La fonction racine carrée ne peut donc être ni paire ni impaire.

5.3 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 14. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve : Soient a et b deux réels de $]0; +\infty[$ tels que $a < b$. On sait du chapitre sur l'ordre que $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. Donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée :

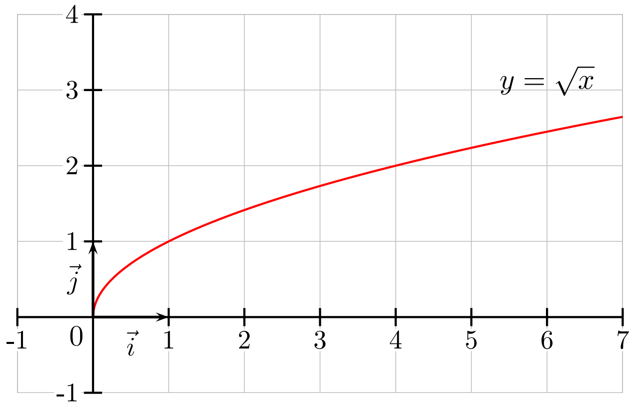
x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction racine carrée admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}^+$, atteint en 0.

5.4 Courbe représentative

Dans un repère orthogonal, on esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$



6 Fonctions affines

6.1 Définition

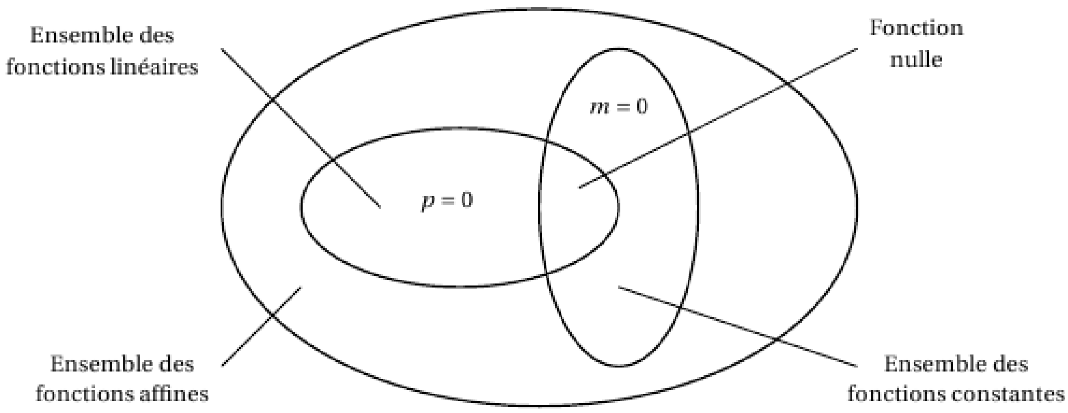
Définition 9. Soient m et p deux réels. On appelle fonction affine toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = mx + p$.

Propriété 15. L'expression algébrique d'une fonction affine ne comporte ni quotient, ni racine, son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$.

Exemples : Les fonctions $f : x \mapsto 3x + 2$, $g : x \mapsto -\pi x + \dfrac{2}{3}$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto 3$ sont affines. Les fonctions $l : x \mapsto 3x^2 + 2$ et $m : x \mapsto \dfrac{3}{x} + 2$

Remarque : Dans la définition précédente :
- Si $m = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p$, et f est une fonction constante et paire
- Si $p = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx$, et f est une fonction linéaire et impaire

La famille des fonctions affines contient donc celles des fonctions constantes et des fonctions linéaires. On peut représenter la situation par un diagramme "en patate" :



6.2 Représentation graphique

6.2.1 Nature géométrique de la courbe représentative d'une fonction affine

Propriété 16. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est $y = mx + p$.
m est appelé le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

<u>Preuve</u> : Soit f une fonction affine définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. On note $\mathcal{D}$ sa représentation graphique.
Soient $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ trois points distincts de $\mathcal{D}$. On a :

$$A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow y_A = f(x_A) \Leftrightarrow y_A = mx_A + p$$

De même : $y_B = mx_B + p$ et $y_C = mx_C + p$

Alors on a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; mx_B + p - (mx_A + p)) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; m(x_B - x_A))$.
De même $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; m(x_C - x_A))$.

Et $(x_B - x_A) \times m(x_C - x_A) = (x_C - x_A) \times m(x_B - x_A)$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont leurs coordonnées proportionnelles. Ces vecteurs sont colinéaires avec un point commun. Les trois points A, B et C sont alignés.
Lorsque l'on choisit trois points distincts de $\mathcal{D}$, ils sont sur une même droite, donc $\mathcal{D}$ est une droite.

Remarque : L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection de la représentation graphique $\mathcal{D}$ d'une fonction affine d'abscisse 0. En effet, en notant M ce point :

$$M \in \mathcal{D} \text{ d'abscisse } 0 \Leftrightarrow y_M = f(0) \Leftrightarrow y_M = 0 \times m + p \Leftrightarrow y_M = p$$

Ce n'est rien d'autre que le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et l'axe des ordonnées.

6.2.2 Caractérisation d'une fonction affine

Propriété 17. Une fonction affine est déterminée par la donnée de deux antécédents distincts et leur image.

<u>Preuve</u> : Lorsque l'on connait deux antécédents distincts et leur image, on connait deux points distincts de la droite représentative de la fonction affine. On a vu au chapitre précédent comment retrouver son équation qui du type $y = mx + p$, qui est unique. L'expression algébrique de la fonction est alors du type $f(x) = mx + p$ et est elle aussi unique.

Exemple : Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(-2) = -1$.
f est une fonction affine ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels m et p tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. On a :

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + p = 2 \\ -2m + p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + p = 2 \\ 3m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = 1 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 2$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto x + 1$

Exercice 6.1. Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 9$ et $f(3) = -11$.

Exercice 6.2. On sait que la fonction qui associe la température en degrés Celsius à la température en degrés Farenheit est une fonction affine. De plus, on connait la correspondance suivante : 0° Celsius correspond à 32° Farenheit.
Déterminer cette fonction, puis en déduire la valeur en degrés Farenheit de 22° Celsius.

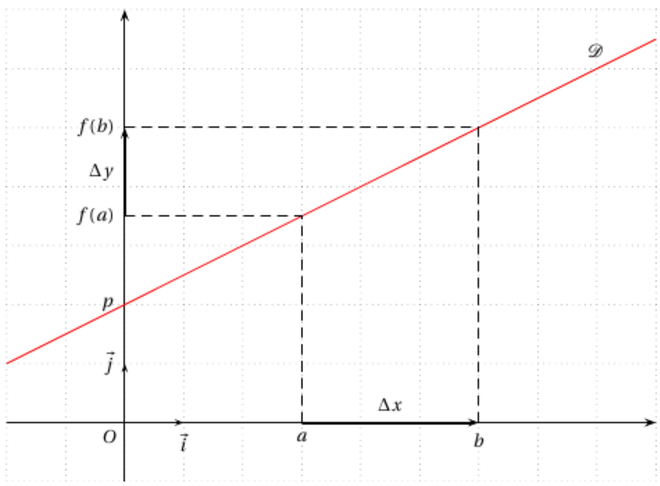
Propriété 18. Une fonction f est affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

Preuve :

- ***Si f est une fonction affine*** alors il existe deux réels m et p tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.
  Alors $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{bm+p-(am+p)}{b-a} = \dfrac{m(b-a)}{b-a} = m$.
  Donc le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est bien constant.
- ***Si $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant*** alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :
  $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m \Leftrightarrow f(b)-f(a) = m(b-a)$$
  En particulier, si $a = 0$ et $b = x$ un réel quelconque, on a $f(x) - f(0) = mx \Leftrightarrow f(x) = mx + f(0)$.
  On pose $p = f(0)$, il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = mx + p$.
  f est bien une fonction affine.

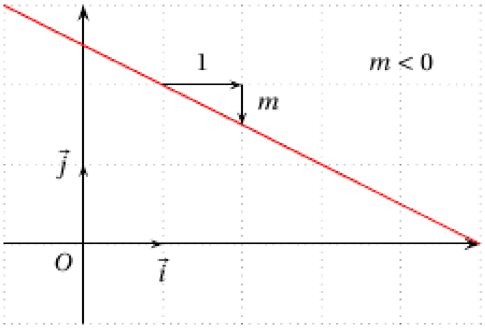
Remarque : La propriété précédente revient à dire que f est affine si et seulement si l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de l'antécédent.
On note $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m$

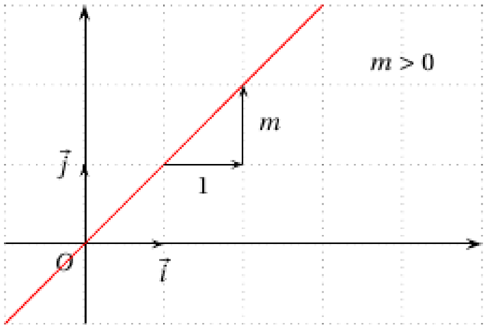
Interprétation graphique :



Conséquence : Interprétation graphique du coefficient directeur

Si l'accroissement de la variable x est égal à 1 alors $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m \Leftrightarrow \Delta y = m$.
Donc l'accroissement de l'image est égal à m.





Ceci nous permet de démontrer qu'une fonction n'est pas affine.

Exemple : On donne le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	-2	0	1
$f(x)$	7	-3	1

La fonction f est-elle affine ?

On a : $\dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3 - 7}{2} = -5$ et $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{1 - (-3)}{1} = 4$

Donc $\dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} \neq \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$. D'après la propriété précédente, la fonction n'est pas affine.

Exercice 6.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. L'accroissement de la fonction est-il proportionnel à l'accroissement de la variable ?
2. La fonction f est-elle affine ?

6.2.3 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 19. Soit f la fonction affinie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

1. Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

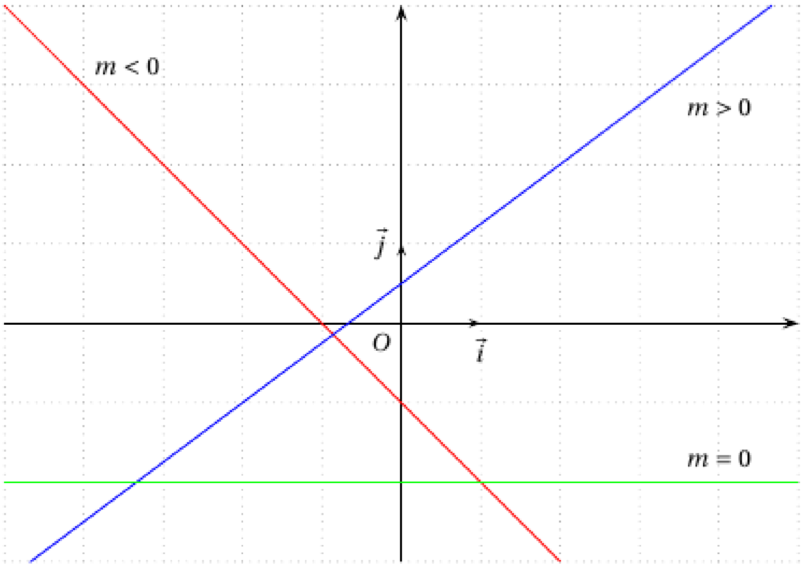
Preuve : Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On a :

$$f(b) - f(a) = mb + p - (ma + p) = m(b - a)$$

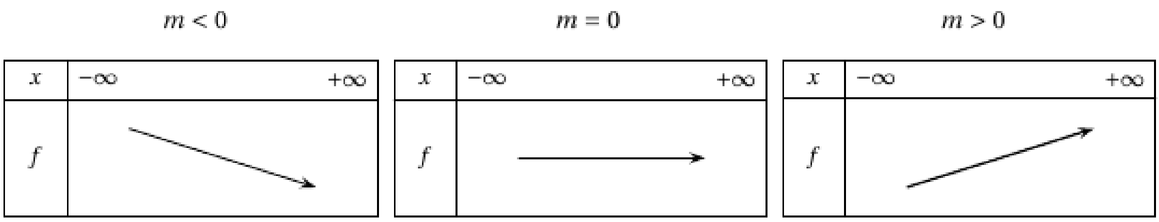
Comme $a < b$, on a $b - a > 0$. La différence $f(b) - f(a)$ est donc du signe de m.

1. Si $m < 0$, alors $m(b-a) < 0$ donc $f(b) < f(a)$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $m = 0$, alors $m(b-a) = 0$ donc $f(b) = f(a)$ et f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $m < 0$, alors $m(b-a) < 0$ donc $f(b) > f(a)$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Illustration graphique :



On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction affine en fonction du signe de m.



6.3 Signe d'une fonction affine

Propriété 20. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$. Alors $f(x)$ s'annule en $x = -\dfrac{p}{m}$ et est du signe de m pour $x > -\dfrac{p}{m}$.

On résume la situation ainsi :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

Preuve : Déjà faite dans le chapitre sur l'ordre.

6.4 Cas particulier des fonctions linéaires

Propriété 21. Toute fonction linéaire est impaire.

Preuve : Soit f une fonction linéaire du type $f(x) = mx$.
Son domaine de définition est centré en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = m \times (-x) = -mx = -f(x)$.
Donc f est impaire.

Conséquence : La courbe représentative d'une fonction linéaire est symétrique par rapport à l'origine du repère. De plus, elle passe par l'origine du repère.

Propriété 22. Soit f une fonction linéaire. Les antécédents sont proportionnels aux images.

Preuve : Découle directement de la définition.

Ainsi tout tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité. Le réel m est le coefficient de proportionnalité.

7 Fonction valeur absolue

7.1 Définition

<u>Définition</u> 10. La distance entre deux réels x et y est la distance, sur une droite graduée, entre les points d'abscissses x et y. On la note $d(x;y)$.

Exemples : $d(5;3) = 2$, $d(-4;-1) = 3$ et $d(3;-2) = 5$.

<u>Définition</u> 11. On appelle fonction valeur absolue la fonction qui à tout réel x associe sa distance à 0. On note $f(x) = |x|$.

Exemple : $|5| = 5$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$,
$|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$,
$|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$ car $2-\sqrt{2} > 0$.

Propriété 23. La fonction valeur absolue ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarques :
– La fonction valeur absolue peut se définir explicitement ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x \leq 0 \end{cases}$$

– La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

Propriété 24. Soient x et y deux réels.

1. $|-x| = |x|$
2. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$

<u>Preuve</u> : Revenir à la définition avec la distance à 0 et les abscisses de points. Penser à distinguer les cas que $x = 0$.

Propriété 25. Soient x un réel et k un réel positif.

1. $|x| = r \Leftrightarrow x = k$ ou $x = -k$
2. $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
3. $|x| > k \Leftrightarrow x > k$ ou $x < k$

<u>**Exercice**</u> **7.1.** Résoudre analytiquement et géométriquement les équations suivantes :

$|x-7| = 3$ $\qquad$ $|y+4| = 6$ $\qquad$ $|2x-7| = 8$ $\qquad$ $|x-1| = -4$

<u>**Exercice**</u> **7.2.** Résoudre analytiquement et géométriquement les inéquations suivantes :

$|x-7| \leq 3$ $\qquad$ $|y+4| < 6$ $\qquad$ $|2x-7| > 8$

Propriété 26. Soient a et x deux réels, et k un réel positif ou nul. Les assertions suivantes sont équivalents :

1. $|x-a| = k$
2. $d(x;a) = k$
3. $a - k \leq x \leq a + k$
4. $x \in [a-k; a+k]$

7.2 Parité

Propriété 27. La fonction valeur absolue est paire.

<u>*Preuve*</u> *:* La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, domaine centré en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.
Donc la fonction valeur absolue est paire.

<u>Conséquence :</u> Dans un repère orthogonale, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

7.3 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 28. La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty : 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Preuve : Soient a et b deux réels de $[0; +\infty[$ tels que $a < b$. Alors $|a| = a$ et $|b| = b$ donc

$$a < b \Leftrightarrow |a| < |b| \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

Donc la fonction valeur absolue est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Comme la fonction valeur absolue est paire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty : 0]$.
On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction valeur absolue :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x \rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction valeur absolue admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

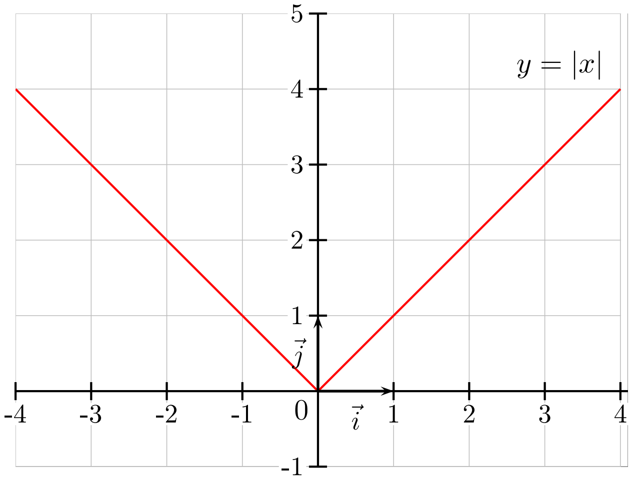
7.4 Courbe représentative

Sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) = |x| = x$. Il s'agit donc de l'expression d'une fonction affine. La courbe représentative de la fonction valeur absolue sur R^+ est une droite.

Dans un repère orthogonal du plan, on esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	4
$f(x)$	0	4

On trace le restant de la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



<u>Exercice</u> 7.3. Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes $f_1 : x \mapsto |1 + 2x|$ et $f_2 : x \mapsto |2x + 3| + |x|$ définies sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 7.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x| - |2x - 2| + 2 - x$

1. Etudier les variations de f
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

Les Annexes

Fiche d'exercices

Exercice 1.1. On considère la fonction g définie par $g(x) = -x^2$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}^-$.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction g.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 1.2. Même exercice que précédemment, avec la fonction h définie pas $h(x) = x^2 + 1$ et la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 1.3. Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)^2$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 1]$.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
6. Résoudre graphiquement $f(x) = 2$, $f(x) < -1$ et $a(x) \geq 4$

Exercice 1.4. Soit a la fonction définie par $a(x) = x^2 + 4x + 14$.

1. Déterminer D_a.
2. Etudier la parité de la fonction a.
3. Montrer que $a(x) = (a+2)^2 + 10$ pour tout $x \in D_a$
4. Déterminer le sens de variation de a sur $[-2; +\infty[$, puis sur $]-\infty; -2]$.
5. Etablir le tableau de variations de la fonction a.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction a.
7. Résoudre graphique $a(x) = 2$, $a(x) < 15$ et $a(x) \geq 19$.

Exercice 1.5.

1. Sur votre calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ et $f_3 : x \mapsto x^3$ définies sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant le graphique, ranger dans l'ordre croissant x, x^2 et x^3 pour x positif.

Exercice 1.6. Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{x}$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 0[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 1.7. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

1. Déterminer D_g.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Déterminer le sens de variation de g sur $]-1; +\infty[$, puis sur $]-\infty; -1[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 1.8. Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 9$ et $f(3) = -11$.

Exercice 1.9. On sait que la fonction qui associe la température en degrés Celsius à la température en degrés Farenheit est une fonction affine. De plus, on connait la correspondance suivante : 0° Celsius correspond à 32° Farenheit.
Déterminer cette fonction, puis en déduire la valeur en degrés Farenheit de 22° Celsius.

Exercice 1.10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. L'accroissement de la fonction est-il proportionnel à l'accroissement de la variable ?
2. La fonction f est-elle affine ?

Exercice 1.11. Résoudre analytiquement et géométriquement les équations suivantes :

$|x - 7| = 3$ $\qquad$ $|y + 4| = 6$ $\qquad$ $|2x - 7| = 8$ $\qquad$ $|x - 1| = -4$

Exercice 1.12. Résoudre analytiquement et géométriquement les inéquations suivantes :

$|x - 7| \leq 3$ $\qquad$ $|y + 4| < 6$ $\qquad$ $|2x - 7| > 8$

Exercice 1.13. Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes $f_1 : x \mapsto |1 + 2x|$ et $f_2 : x \mapsto |2x + 3| + |x|$ définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x| - |2x - 2| + 2 - x$

1. Etudier les variations de f
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

ETUDES DE DIVERSES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

On donne les définitions suivantes :

Définition 1. On appelle fonction cube la fonction définie par $f(x) = x^3$.

Définition 2. On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Définition 3. On appelle fonction racine carrée la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Définition 4. Soient m et p deux réels. On appelle fonction affine toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = mx + p$.

En suivant la démarche scientifique d'étude d'une fonction donnée en début de chapitre, étudier les fonctions suivantes :

- La fonction cube
- La fonctin inverse
- La fonction racine carré
- Les fonctions affines

Indications :

- Il conviendra de s'appuyer sur l'exemple de l'étude de la fonction carrée
- Pour l'étude du sens de variation des fonctions, on pourra commencer par les tracer sur la calculatrice et de conjecturer les intervalles où la fonction est monotone. Il faudra cependant tout démontrer ensuite ! ! Pour cela, on utilisera les propriétés vues lors du chapitre sur l'ordre, considérées comme acquises.
- On tracer toutes les courbes dans un repère orthogonal, avec une échelle appropriée.
- Pour l'étude des fonctions affines, on pourra distinguer les cas $m < 0$, $m = 0$ et $m > 0$.

Etudes de diverses fonctions de référence

Exercice 2.1. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Quelle propriété géométrique pouvez-vous en déduire sur la courbe représentative de f ?
4. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}^-$, puis sur $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. La fonction f admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$? un maximum ? Si oui, quand sont-ils atteints ?
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2.2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Quelle propriété géométrique pouvez-vous en déduire sur la courbe représentative de g ?
4. Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$. En déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}^{*-}$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
6. La fonction g admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$? un maximum ? Si oui, quand sont-ils atteints ?
7. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 2.3. On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier la parité de la fonction h.
3. Montrer que h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. La fonction h admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$? un maximum ? Si oui, quand sont-ils atteints ?
6. Tracer la courbe représentative de la fonction h.

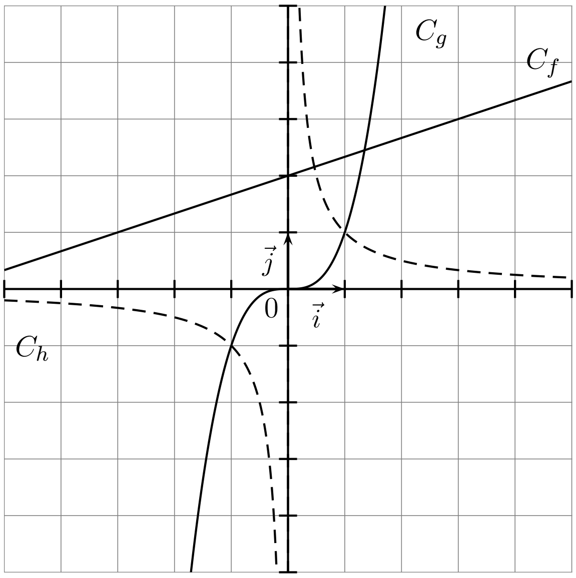
Exercice 2.4. Soient m et p deux réels. On considère la fonction k définie par $k(x) = mx + p$.

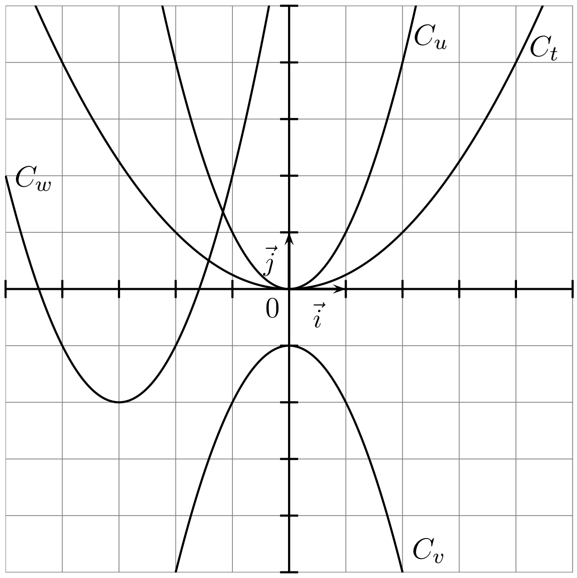
1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier la parité de la fonction k quand $m = 0$.
3. Etudier la parité de la fonction k quand $p = 0$
4. Etudier la parité de la fonction k quand $m \neq 0$ et $p \neq 0$.
5. Etudier le sens de variation de k sur $\mathbb{R}$ quand $m > 0$.
6. Etudier le sens de variation de k sur $\mathbb{R}$ quand $m < 0$.
7. Etudier le sens de variation de k sur $\mathbb{R}$ quand $m = 0$.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction k dans les trois cas précédents.
9. La fonction k admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$? un maximum ? Si oui, quand sont-ils atteints ?

Devoir Surveillé 7 (1h)

Exercice 3.1. (3.5 points)

Trouver les expressions des fonctions f, g, h, u, v, w et t représentées sur les graphes ci-dessous :





Exercice 3.2. (3 points)

Déterminer la fonction affine f telle que $f(2) = -9$ et $f(-3) = 11$.

Exercice 3.3. (7.5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 24x - 43$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Montrer que $f(x) = -3(x-4)^2 + 5$
4. Encadrer $f(x)$ lorsque $5 \leq x < 7$.
5. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$
6. Trouver le sens de variation de f sur $]-\infty; 4[$
7. Dresser le tableau de variation de f
8. En déduire le maximum de f.

Exercice 3.4. (6 points)

On note g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2x-4}$

1. Trouver l'ensemble de définition de la fonction g
2. Calculer $g(0)$ et l'image de 1
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = \dfrac{5}{2}$
4. Encadrer x lorsque $g(x) \in [2; 3]$
5. Démontrer que g est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$
6. Démontrer que g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$

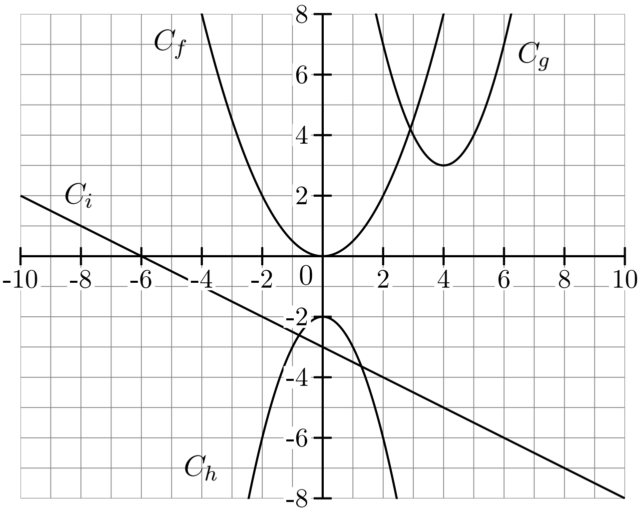
Devoir Surveillé 7 (1h)

<u>Exercice</u> 3.1. (8 points)

1. (a) Par quelle expression algébrique définit-on la fonction carré ?
   (b) Pourquoi son domaine de définition est-il $\mathbb{R}$?
   (c) Dresser son tableau de variations
   (d) Quelles sont les images respectives par la fonction carré des nombres -9 et $\frac{2}{3}$?
   (e) Quels sont les antécédents éventuels par la fonction carrée des nombres 64 et -36 ?
2. (a) Soit k un nombre réel et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = kx^2$
   Expliquer, suivant les valeurs de k, la forme de la représentation graphique de f_k.
   (b) Soit m un nombre réel et g_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_m = x^2 + m$
   Expliquer le lien entre la représentation graphique de la fonction carré et de celle de g_m
   (c) Soit u un nombre réel et h_u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_u = (x-u)^2$
   Expliquer le lien entre la représentation graphique de la fonction carré et celle de h_u.
3. (a) Par quelle expression algébrique définit-on la fonction inverse ?
   (b) Quel est son domaine de définition ?
   (c) Dresser son tableau de variations

<u>Exercice</u> 3.2. (5 points)

Quatre fonctions sont représentées ci-contre : f, g, h et i dont les courbes sont nommées respectivement C_f, C_g, C_h et C_i.



1. Donner les expressions algébriques des quatres fonctions représentées.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = 2$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
4. Résoudre graphiquement $i(x) < 0$.

<u>Exercice</u> 3.3. (7 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 8x - 11$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la parité de la fonction f.
3. Montrer que $f(x) = -(x-4)^2 + 5$
4. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$
5. Trouver le sens de variation de f sur $]-\infty; 4[$
6. Dresser le tableau de variation de f
7. En déduire le maximum de f.

Correction DS 7

Exercice 3.1. (3.5 points) On trouve :

$f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2,$ $\quad h : x \mapsto \frac{1}{x},$ $\quad v : x \mapsto -x^2 - 1,$ $\quad t : x \mapsto (x+3)^2 - 2$

$g : x \mapsto x^3,$ $\quad u : x \mapsto x^2,$ $\quad w : x \mapsto \frac{x^2}{4},$

Exercice 3.2. (3 points) On sait que f est affine donc de la forme $f(x) = mx + p$.

$$\begin{cases} f(2) = -9 \\ f(-3) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + p = -9 \\ -3m + p = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + p = -9 \\ -5m = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ 2 \times (-4) + p = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ p = -1 \end{cases}$$

Donc $f(x) = -4x - 1$.

Exercice 3.3. (7.5 points)

1. $D_f = \mathbb{R}$ car l'expression de f ne contient ni racine ni quotient.
2. D_f est symétrique par rapport à 0. De plus $f(-x) = -3(-x)^2 + 24 \times (-x) - 43 = -3x^2 - 24x - 43$, ce qui est différent de $f(x)$ et de $-f(x)$. Donc la fonction f n'est ni paire ni impaire.
3. $$\begin{aligned} -3(x-4)^2 + 5 &= -3(x^2 - 8x + 16) + 5 = -3x^2 + 24x - 48 + 5 \\ &= -3x^2 + 24x - 43 = f(x) \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} 5 \leq x < 7 &\Leftrightarrow 1 < x - 4 < 3 \\ &\Leftrightarrow 1 < (x-4)^2 < 9 \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur les positifs)} \\ &\Leftrightarrow -3 > -3(x-4)^2 > -27 \\ &\Leftrightarrow 2 - 3(x-4)^2 + 5 > -22 \end{aligned}$$
5. Soient a et b appartenant à $]4; +\infty[$ tels que $4 < a < b$. Alors
$$\begin{aligned} 4 < a < b &\Leftrightarrow 0 < a - 4 < b - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 < (a-4)^2 < (b-4)^2 \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ strictement croissante sur les positifs)} \\ &\Leftrightarrow 0 > -3(a-4)^2 > -3(b-4)^2 \\ &\Leftrightarrow 5 > -3(a-4)^2 + 5 > -3(b-4)^2 + 5 \end{aligned}$$
Donc f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$
6. Soient a et b appartenant à $]-\infty; 4[$ tels que $4 > a > b$. Alors
$$\begin{aligned} 4 > a > b &\Leftrightarrow 0 > a - 4 > b - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 < (a-4)^2 < (b-4)^2 \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ strictement décroissante sur les négatifs)} \\ &\Leftrightarrow 0 > -3(a-4)^2 > -3(b-4)^2 \\ &\Leftrightarrow 5 > -3(a-4)^2 + 5 > -3(b-4)^2 + 5 \end{aligned}$$
Donc f est strictement croissante sur $]4; +\infty[$.

7.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

8. Le maximum de f est 5 atteint quand $x = 4$.

<u>Exercice</u> 3.4. (6 points)

On note g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2x-4}$

1. On doit avoir $2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
2. $g(0) = \dfrac{1}{2 \times 0 - 4} = -\dfrac{1}{4}$ et $g(1) = \dfrac{1}{2 \times 1 - 4} = -\dfrac{1}{2}$
3.

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{5}{2} & \Leftrightarrow \frac{1}{2x-4} = \frac{5}{2} \text{ et } x \in D_g \text{ (donc } 2x - 4 \neq 0) \\ & \Leftrightarrow 5(2x-4) = 2 \text{ et } x \neq 2 \\ & \Leftrightarrow 10x - 20 = 2 \text{ et } x \neq 2 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \text{ et } x \neq 2. \text{ Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{11}{5} \right\} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} g(x) \in [2;3] & \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{2x-4} \leq 3 \text{ et } x \in D_g \text{ (donc } 2x - 4 \neq 0) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2x - 4 \leq \frac{1}{3} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 4 \leq 2x \leq \frac{1}{3} + 4 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq 2x \leq \frac{13}{3} \\ & \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{13}{6} \end{aligned}$$

5. Soient a et b appartenant à $]2; +\infty[$ tels que $2 < a < b$. Alors

$$\begin{aligned} 2 < a < b \Leftrightarrow 4 < 2a < 2b & \Leftrightarrow 0 < 2a - 4 < 2b - 4 \\ & \Rightarrow \frac{1}{2a-4} > \frac{1}{2b-4} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur les positifs.} \end{aligned}$$

Donc g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$

6. Soient a et b appartenant à $]-\infty; 2[$ tels que $2 > a > b$. Alors

$$\begin{aligned} 2 > a > b \Leftrightarrow 4 > 2a > 2b & \Leftrightarrow 0 > 2a - 4 > 2b - 4 \\ & \Rightarrow \frac{1}{2a-4} < \frac{1}{2b-4} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur les négatifs.} \end{aligned}$$

Donc g est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$

Correction DS7

Exercice 3.1.

1. (a) La fonction carré est la fonction définie par $f(x) = x^2$

   (b) Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ car on peut toujours calculer le carré d'un nombre.

   (c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

   (d) $f(-9) = (-9)^2 = 81$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$

   (e) Les antécédents de 64 sont 8 et -8. Le nombre -36 n'a pas d'antécédent par la fonction carré car $-36 < 0$.

2. (a) Si $k > 0$, la représentation graphique de f_k sera une parabole tournée vers le haut. Elle sera plus ($k < 1$) ou moins ($k > 1$) ouverte que celle représentative de la fonction carré.
   Si $k > 0$, la représentation graphique de f_k sera une parabole tournée vers le bas. Elle sera plus ($k > -1$) ou moins ($k < -1$) ouverte que celle représentative de la fonction carré.

   (b) La représentation graphique de la fonction carré est la même que celle de g_m, mais décalée de m graduations sur l'axe des ordonnées.

   (c) La représentation graphique de la fonction carré est la même que celle de g_m, mais décalée de u graduations sur l'axe des abscisses.

3. (a) La fonction inverse est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   (b) Son domaine de définition est $\mathbb{R}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.

   (c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Exercice 3.2.

1. On trouve : $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, $g : x \mapsto (x^2 - 4) + 3$, $h : x \mapsto -x^2 - 2$ et $i : x \mapsto -0.5x - 3$
2. On trace la droite horizontale d'équation $y = 2$. On trouve $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$
3. On regarde les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g. $\mathcal{S} = \{2.8\}$
4. $\mathcal{S} =]-6; +\infty[$

Exercice 3.3.

1. $D_f = \mathbb{R}$ car l'expression de f ne contient ni racine ni quotient.
2. D_f est symétrique par rapport à 0. De plus $f(-x) = -(-x)^2 + 8 \times (-x) - 11 = -x^2 - 8x - 11$, ce qui est différent de $f(x)$ et de $-f(x)$. Donc la fonction f n'est ni paire ni impaire.
3.
$$\begin{aligned} -(x-4)^2 + 5 &= -(x^2 - 8x + 16) + 5 = -x^2 + 8x - 16 + 5 \\ &= -x^2 + 8x - 11 = f(x) \end{aligned}$$

4. Soient a et b appartenant à $]4; +\infty[$ tels que $4 < a < b$. Alors
$$\begin{aligned} 4 < a < b &\Leftrightarrow 0 < a - 4 < b - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 < (a-4)^2 < (b-4)^2 \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ strictement croissante sur les positifs)} \\ &\Leftrightarrow 0 > -(a-4)^2 > -(b-4)^2 \\ &\Leftrightarrow 5 > -(a-4)^2 + 5 > -(b-4)^2 + 5 \end{aligned}$$
Donc f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$
5. Soient a et b appartenant à $]-\infty; 4[$ tels que $4 > a > b$. Alors
$$\begin{aligned} 4 > a > b &\Leftrightarrow 0 > a - 4 > b - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 < (a-4)^2 < (b-4)^2 \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ strictement décroissante sur les négatifs)} \\ &\Leftrightarrow 0 > -(a-4)^2 > -(b-4)^2 \\ &\Leftrightarrow 5 > -(a-4)^2 + 5 > -(b-4)^2 + 5 \end{aligned}$$
Donc f est strictement croissante sur $]4; +\infty[$.
6.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

7. Le maximum de f est 5 atteint quand $x = 4$.