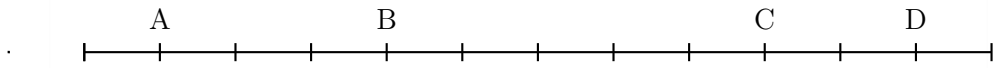
Dernière modification : 28 novembre 2008

Devoir surveillé °2

Exercice 4.1. (2 points) Sur cette feuille

À partir de la droite graduée ci-dessous, compléter les égalités suivantes à l'aide d'un nombre réel.



$$\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{CD}\,; \quad \overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{AB}\,; \quad \overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{DC}\,; \quad \overrightarrow{CB} = \ldots\overrightarrow{DA}$$

Exercice 4.2. (2 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(3005;4003)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 4.3. (6 points)

ABC est un triangle, le point I est le milieu de $[AC]$, F est le symétrique de B par rapport à C, et D est le point défini par : $3\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA}$. .

1. Prouver que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA}$.
2. Faire une figure à la règle non graduée et au compas.
3. Exprimer $\overrightarrow{BF}$ puis $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
4. En remarquant que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$, déduire des questions précédentes l'expression du vecteur $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
5. Déduire des questions précédentes les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans le repère $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.
6. Montrer que les droites (DF) et (BI) sont parallèles.

Exercice 4.4. (10 points) Unité graphique : 1 cm

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;5)$, $B(4;-2)$, $C(-5;1)$ et $D(-1;6)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la longueur du segment $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ? Justifier.
5. Le point G est tel que $ABCG$ soit un parallèlogramme.
   (a) Traduire cette propriété par une égalité vectorielle.
   (b) Calculer les coordonnées du point G.
6. On appelle I le milieu du segment $[BC]$. Déterminer les coordonnées du point I.
7. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
   (a) Placer à la règle graduée et au compas le point K.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BK}$ admet pour coordonnées $\left(-4;\frac{9}{2}\right)$
   (c) En déduire celles du point K.
8. Démontrer par le calcul que les points A, B et K ne sont pas alignés.

Correction DS 2

Exercice 4.1. (2 points)

$$\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{CD}\,; \quad \overrightarrow{AC} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AB}\,; \quad \overrightarrow{AD} = -5\overrightarrow{DC}\,; \quad \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

Exercice 4.2. (2 points) On choisit par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{AB}(3,4)$ et $\overrightarrow{AC}(3003;4004)$. On constate que $\overrightarrow{AC} = 1001 \times \overrightarrow{AB}$. Deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires. Donc A, B et C sont alignés.

Exercice 4.3. (6 points)

1.
$$\begin{aligned} & 3\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA} \\ \iff\ & 3\overrightarrow{DB} = 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}\right) \\ \iff\ & 3\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BA} \\ \iff\ & 3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BA} \\ \iff\ & \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BA} \\ \iff\ & \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

2. Figure

3. $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$ car F est le symétrique de B par rapport à C.
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

4. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{BD}(-2;0)$, $\overrightarrow{BF}(0;2)$, $\overrightarrow{BI}(0.5;0.5)$ et $\overrightarrow{DF}(2;2)$ dans le repère $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.
6. On a clairement $\overrightarrow{DF} = 4\overrightarrow{BI}$. Donc les droites (DF) et (BI) sont parallèles.

Exercice 4.4. (10 points)

1. Figure
2. On a $\overrightarrow{AC}(-7;-4)$. Donc $AC = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$.
3. $\overrightarrow{AB}(2;-7)$, $\overrightarrow{BC}(-9;3)$ et $\overrightarrow{AD}(-3;1)$
4. On remarque $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD}$. Donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
5. (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC}$

   (b) On note $G(x_G;y_G)$. On veut $\begin{cases} 2 = -5 - x_G \\ -7 = 1 - y_G \end{cases} \iff \begin{cases} x_G = -7 \\ y_G = 8 \end{cases}$. Donc $G(-7;8)$.
6. On a $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2}$. Donc $x_I = -\dfrac{1}{2}$ et $y_I = -\dfrac{1}{2}$. Donc $I(-0.5;0.5)$
7. (b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times(-2) + \frac{1}{4}\times(-9) \\ \frac{1}{2}\times(7) + \frac{1}{4}\times(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{BK}\left(-\frac{13}{4};\frac{17}{4}\right)$

   (c) On note $K(x_K;y_K)$. Alors $\overrightarrow{BK}(x_K-4;y_K+2)$. Donc on a : $\begin{cases} x_K - 4 = -\frac{13}{4} \\ y_K + 2 = \frac{17}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = \frac{3}{4} \\ y_K = \frac{9}{2} \end{cases}$
8. On a $\overrightarrow{AB}(2;-7)$ et $\overrightarrow{BK}(-\frac{13}{4};\frac{17}{4})$. Mais $2 \times \frac{17}{4} = \frac{17}{2}$ et $-7 \times -\frac{13}{4} = \frac{91}{4}$. Donc les points A, B et K ne sont pas alignés.