

Table des matières

I) Proportion	1
I-1 Proportion et pourcentage	1
I-2 Proportions et réunion	2
I-3 Proportions de proportions	3
II) Évolution d'une quantité	3
II-1 Taux dévolution	3
II-2 Coefficient multiplicateur	4
II-3 Évolutions successives et réciproque	5

LEÇON 1

Pourcentages



I) Proportion

Un petit clin d'oeil à notre ministre pour commencer :

Exercice 1.

10 objets identiques coûtent ensemble 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

Problème de Luc Chatel

I-1 Proportion et pourcentage

Travail de l'élève : L'an passé, 29 élèves de terminale 1 et 26 élèves de terminale 2 ont obtenu le bac.

- “la classe de terminale 1 a obtenu de meilleurs résultats que la classe de terminale 2 !
- Je ne suis pas d'accord ! La terminale 1 présentait 35 candidats alors que la terminale 2 n'en présentait que 31 !”

Commenter ces affirmations, après avoir calculé les proportions d'élèves ayant réussi dans chacune des deux classes

**Définition 1 :**

Soit E un ensemble fini. On considère une partie A d'un ensemble E . On appelle proportion de A dans E , le quotient du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de E

**Exemple :**

Une classe de 30 élèves comportent 9 filles. La proportion de filles dans la classe est donc de $\frac{9}{30}$. Quelle est la proportion de garçon dans cette classe ?

Remarque : Les proportions s'expriment sous forme de pourcentages.

$$\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$$

Exercice 2. En 2003, les baccalauréats technologiques représentaient 28% des baccalauréats et la section STT représentait 53% des baccalauréats technologiques. Quelle est la proportion de STT en France ?

Exercice 3. Au distributeur de boisson, 26% des élèves prennent du café, 46% prennent du chocolat chaud et 28% prennent un soda. Un élève ne prend qu'une boisson. Combien prennent une boisson chaude ?

Exercice 4. Calculer l'effectif à partir d'une proportion

1. Dans un petit port de 720 habitants, 5 habitants sur 6 vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?
2. Dans un village voisin, 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y-a-t-il d'habitants dans ce village ?

I-2 Proportions et réunion

Travail de l'élève : Sur 1000 personnes interrogées, 420 ont déclaré posséder un ordinateur et 730 ont déclaré posséder un téléviseur ; parmi elles, 345 possèdent les deux. Le tableau suivant indique tous les résultats de ce sondage.

	ont un ordinateur	n'ont pas d'ordinateur	total
ont un téléviseur	345	385	730
n'ont pas de téléviseur	75	195	270
Total	420	580	1000

On désigne par :

E la population des personnes ayant répondu au sondage et n_E son effectif ;

A la sous population des personnes qui possèdent un ordinateur et n_A son effectif ;

B la sous population des personnes qui possèdent un téléviseur et n_B son effectif ;

$A \cap B$ la sous population des personnes qui possèdent un ordinateur et un téléviseur, et $n_{A \cap B}$ son effectif ;

$A \cup B$ la sous population des personnes qui possèdent un ordinateur ou un téléviseur (c'est-à-dire qui possèdent au moins l'un des deux appareils), et $n_{A \cup B}$ son effectif.

- Utiliser le tableau pour calculer le nombre de personnes qui possèdent un ordinateur ou un téléviseur ; en déduire une égalité reliant $n_{A \cup B}$ à n_A , n_B et $n_{A \cap B}$.
- On note p_A , p_B , $p_{A \cap B}$ et $p_{A \cup B}$ les proportions des sous-populations A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$ dans la population E . Calculer ces proportions ; en déduire une égalité reliant $p_{A \cup B}$ à p_A , p_B et $p_{A \cap B}$.



Définition 2 :

On considère de sous-population A et B d'une même population E .

$A \cap B$ est la sous population des individus qui appartiennent à A et B ($A \cap B$ est l'**intersection** de A et de B).

$A \cup B$ est la sous population des individus qui appartiennent à A ou à B , c'est-à-dire qui appartiennent au moins à l'une des deux ($A \cup B$ est l'**union** de A et de B).



Exemple :

Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; $A = \{2; 3; 4\}$ et $B = \{0; 1; 2\}$ alors :

- A et B sont deux sous-populations de E
- $A \cap B = \{2\}$
- $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$



Propriété 1 :

On considère deux sous-populations A et B d'une même population E , on note p_A , p_B , $p_{A \cap B}$ et $p_{A \cup B}$ les proportions de A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$ alors on a :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

Exercice 1. À la suite de plaintes de consommateurs, un fabricant d'appareils ménagers inspecte les 500 derniers appareils qui viennent d'être fabriqués. Il constate que 25 ont un défaut a , 19 ont un défaut b et 12 ont un défaut c . Parmi ces appareils défectueux 5 ont à la fois les défauts a et b , les autres n'ont qu'un seul défaut.

- Déterminer la proportion d'appareils inspectés ayant le défaut a ou le défaut b
- Déterminer la proportion d'appareils inspectés ayant le défaut b ou le défaut c

Exercice 2. Applications!

- Un club sportif propose plusieurs activités, entre autres le yoga et le judo. Parmi les 90 membres du club, 25 pratiquent le judo, 31 le yoga et 7 pratiquent les deux. Calculer la proportion des membres du club qui pratiquent le judo et le yoga.
- Dans ce même club, 10 membres pratiquent le tir à l'arc, mais ne pratiquent pas le judo. Calculer la proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le tir à l'arc.

I-3 Proportions de proportions

Travail de l'élève : Répartition des générations

Dans cette activité, “ la population des 0 – 60 ans” signifie la population des personnes qui ont 60 ans ou moins.

1. Dans un village de 350 habitants, la proportion de la sous-population des 0 – 60 ans est $p' = 0,8$. Calculer le nombre d'habitants qui sont dans la tranche d'âge 0 – 60 ans.
2. La proportion de la population des 0 – 19 ans dans la population des 0 – 60 ans est $p = 0,35$. Calculer le nombre d'habitants qui sont dans la tranche d'âge des 0 – 19 ans.
3. Calculer la proportion Q de la sous-population des 0 – 19 ans dans la population du village. Vérifier que $Q = pp'$
4. On note F la population du village, E la population des 0 – 60 ans, A la population des 0 – 19 ans et n_F , n_E et n_A leurs effectifs respectifs. Recopier, puis compléter le schéma suivant :

$$\boxed{n_F = \dots\dots\dots} \xrightarrow{\times 0,8} \boxed{n_E = \dots\dots\dots} \xrightarrow{\times 0,35} \boxed{n_A = \dots\dots\dots}$$



Propriété 2 :

Si p est la proportion de A dans E et p' celle de E dans F , alors la **proportion Q de A dans F** est :
 $Q = pp'$



Exemple :

Dans une famille, $\frac{2}{3}$ des membres sont musiciens et, parmi ces derniers $\frac{3}{4}$ jouent du violon. La proportion des membres de la famille qui jouent du violon est alors : $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

Exercice 3. Lors d'une élection, 70% des électeurs inscrits ont effectivement voté.

1. Le candidat X a obtenu 38% des voix des électeurs qui ont voté. Calculer la proportion des électeurs qui ont voté X parmi les électeurs inscrits.
2. Le candidat Y a obtenu 38,5% des voix des électeurs inscrits. Calculer la proportion des électeurs qui ont voté Y parmi les électeurs qui ont voté.

Exercice 4. Un lycée polyvalent comporte des sections d'enseignement technologique (STG,...) et des sections d'enseignement général (L,S,...).

1. La proportion d'élèves de la section STG parmi les élèves de l'enseignement technologique est 0,6 ; la proportion d'élèves de l'enseignement technologique parmi les élèves du lycée est 0,8. Calculer la proportion d'élèves du lycée qui sont en STG.
2. Ce lycée a une équipe de natation synchronisée (pratiquée exclusivement par les filles). La proportion des pratiquantes de natation synchronisée parmi les filles qui font du sport au lycée est égale à 15%. La proportion des pratiquantes de natation synchronisée parmi les élèves (garçons et filles) qui font du sport au lycée est 9%. Quelle est la proportion de filles parmi les élèves qui font du sport au lycée ?

II) Évolution d'une quantité

II-1 Taux dévolution

Travail de l'élève : On peut lire dans un journal :

“le prix du produit X, qui est passé de 500€ à 502€, n'a pratiquement pas bougé” et plus loin :
 “hausse impressionnante du prix du produit Y, qui est passé de 2€ à 3€.”

1. Calculer les variations de prix, exprimées en euros, des produits X et Y : ces résultats expliquent-ils les écrits du journal ?
2. Écrire, sous forme de pourcentage, la variation relative $\frac{502 - 500}{500}$ du prix de X, puis celle du prix Y. Ces résultats expliquent-ils les écrits du journal ?



Définition 3 :

On considère la valeur initiale V_i et la valeur finale V_f d'une quantité. On appelle taux d'évolution de la quantité : $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$

Remarque : Le taux d'évolution représente la variation de la quantité relativement à la quantité de départ.



Exemple :

Dans l'exemple qui précède le taux d'évolution est $t = \frac{15 - 20}{15} = -0,25$. Le prix du disque a donc baissé de 25%

Remarque : le taux d'évolution est positif dans le cas d'une augmentation et négatif dans le cas d'une diminution.

Exercice 5. Comment déterminer la variation absolue et le taux d'évolution d'un nombre à un autre ?

1. La capacité d'un stade est passée de 15000 à 21000. calculer la variation absolue et le taux d'évolution de la capacité du stade.
2. L'entreprise qui a effectué les travaux employait 800 personnes il y a un an ; elle en emploie aujourd'hui 700. Calculer la variation absolue et le taux d'évolution de l'effectif de l'entreprise.

Exercice 6. Applications !

1. Le montant de la redevance de l'audiovisuel était de 114,49€ en 2001 et de 116,50€ en 2004. Calculer la variation absolue et le taux dévolution de cette taxe entre 2001 et 2004.
2. Un bébé qui pesait 2,800 kg à la naissance pèse 2,660 kg à 3 jours. Calculer le taux d'évolution du poids du bébé entre les deux pesées.

II-2 Coefficient multiplicateur

Travail de l'élève : Le prix d'un produit, qui valait 12€, a été multiplié par 1,5.

1. Quel est le prix actuel de ce produit ?
2. Calculer le taux d'évolution t entre le prix initial et le prix actuel ; vérifier que $1 + t = 1,5$



Définition 4 :

On considère la valeur initiale V_i et la valeur finale V_f d'une quantité. On appelle coefficient d'évolution de la quantité : $c = \frac{V_f}{V_i}$

Remarque : Le coefficient d'évolution n'est rien d'autre que le coefficient multiplicateur permettant de passer de la quantité initial à la quantité finale.

 **Exemple :**

Un disque coûtant 20€ est baissé à 15€. Quel est le coefficient d'évolution ?

Exercice 7. 77580 ont été délivrés en 1995. Entre les années 1995 et 2001, le nombre de BTS délivrés par an a augmenté de 26,6%.

1. Trouver le nombre de BTS délivrés en 2001
2. Quel est le coefficient d'évolution ?

Exercice 8. La production dans le secteur métallurgique était, en France, de 75717 millions d'euros en 2002. Sur l'année 2003, la baisse de la production dans ce secteur a été de 5,6%.

1. Quelle est la production du secteur métallurgie en 2003 ?
2. Quel est le coefficient d'évolution ?

Exercice 9. Un VTT affiché à 450€ est soldé à 399€

1. A combien est soldé le VTT ?
2. Quel est le coefficient d'évolution ?

Remarque : Le coefficient d'évolution est supérieur à 1 dans le cas d'une augmentation et inférieur à 1 dans le cas d'une réduction.



Propriété 3 :

On a la relation suivante liant coefficient d'évolution c et taux d'évolution t : $c = 1 + t$

Preuve :

$$1 + t = 1 + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$

Exercice 10. Un lecteur DVD coûtant 100€ voit son prix augmenté de 10% puis diminuer de 10%. Calculer le prix final.

Exercice 11. Si une action baisse de 10%, quelle hausse devra-t-elle subir le lendemain pour retrouver sa valeur initiale ?

Exercice 12. Un magasin réduit de 10% le prix des jeans et augmente de 10% celui des pulls.

1. Calculer le prix après réduction d'un jean dont le prix initial était de 50€.
2. Calculer le prix avant augmentation d'un pull dont le prix actuel est 44€

II-3 Évolutions successives et réciproque

Travail de l'élève : C'est vraiment la fête !

1. Pour fêter l'ouverture de son garage, un concessionnaire automobile fait une réduction de 10% sur un modèle de voiture dont le prix initial est 12000€. Après discussion, un client obtient une remise supplémentaire de 5%.
 - (a) Calculer le prix de la voiture après la première réduction, puis le prix final.
 - (b) Calculer le taux d'évolution du prix initial de la voiture au prix payé par le client ; la réduction totale est-elle de 15% ?
2. Pour la même occasion, le concessionnaire augmente les salaires des employés de 2,5%
 - (a) Quel est le nouveau salaire d'un employé qui gagnait 14000€ ?

- (b) Calculer le taux d'évolution du nouveau salaire à l'ancien (c'est-à-dire 1400€) ; ce taux est-il égal à $-2,5\%$?

**Propriété 4 :**

Si une quantité subit n évolutions successives t_1, t_2, \dots, t_n alors :

- le coefficient d'évolution (global) est $c = c_1 \times c_2 \times \dots \times c_n$, donc comme $c = 1 + t$
- le taux d'évolution (global) est $1 + t = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$

Exercice 13. Un article subit une hausse de 10% puis une baisse de 20% . Quel est son taux d'évolution global ?

Exercice 14. Le chiffre d'affaires de la société Hortus a augmenté de 5% en janvier 2005 par rapport à décembre 2004 et a baissé de 4% en février 2005.

1. Calculer le coefficient d'évolution pour les deux premiers mois.
2. En déduire le taux d'évolution

Exercice 15. Un article subit une inflation (hausse) annuelle de 2% pendant 10 ans. Quel est son taux d'évolution global ?

Exercice 16. Lors d'une journée, le cours d'une action a augmenté de 10% , puis baissé de $9,5\%$. Calculer le taux d'évolution de cette action lors de cette journée, du cours initial au cours terminal ; le cours a-t-il augmenté ou baissé lors de cette journée ?

Exercice 17. Le cours d'une action a augmenté de 10% . Calculer le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer pour que l'action revienne à son cours initial.

Exercice 18. Le prix d'un produit d'usage courant a baissé de 4% , puis à nouveau de 5% . Calculer le taux d'évolution de ce produit, du prix initial au prix final.

Exercice 19. Le prix d'un produit d'usage courant a baissé de 6% . Calculer le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer au produit pour que le produit revienne à son prix initial (arrondir à $0,04\%$ près).