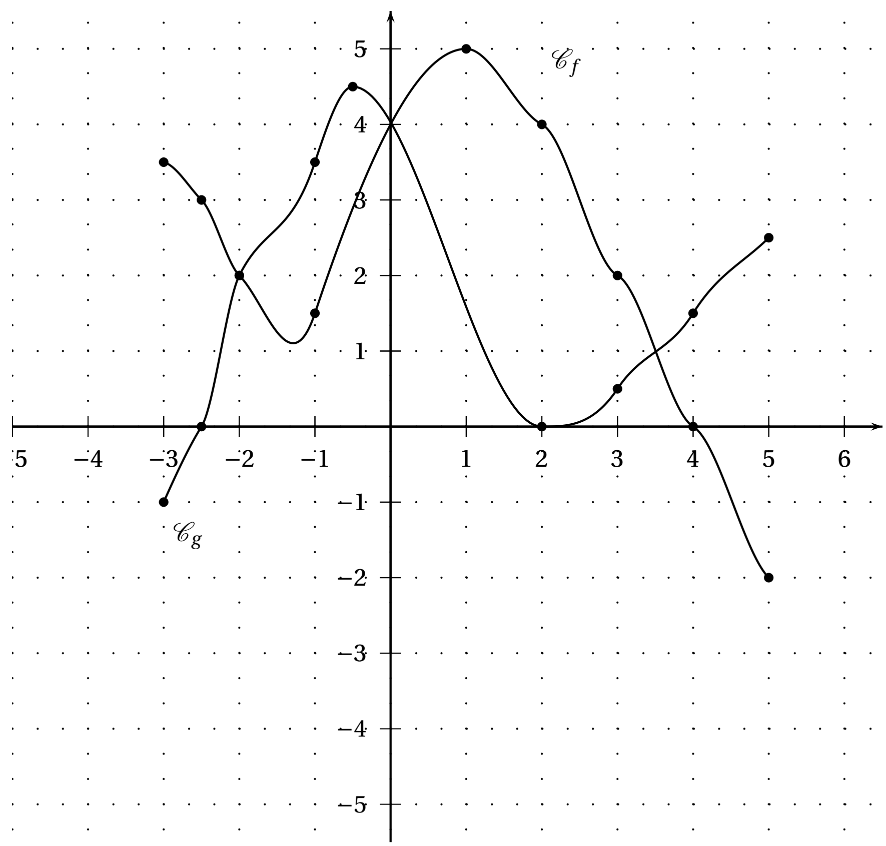
DS 5 : Les fonctions usuelles, applications

Exercice 1. (9 points)

Les fonctions f et g sont définies $[-3;5]$ par leurs représentations graphiques données ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(3)$ et $g(-1)$.
2. Déterminer graphiquement le ou les antécédent(s) par f de 3, puis de -1 par g.
3. Calculer $2 \times f(5) - g(5)$.
4. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

   (a) $f(x) = 1$.

   (b) $g(x) = 0$.

   (c) $f(x) = g(x)$.

   (d) $f(x) > 4$.

   (e) $g(x) < 0$.

   (f) $f(x) \geq g(x)$.

5. Dresser le tableau des variations de f et de g.

Exercice 2. (11 points)

L'entreprise Motrélec fabrique chaque jour une quantité x de moteurs électriques, avec x compris entre 0 et 45.
Le coût de production de x moteurs, exprimé en euros, est donné par la fonction f définie sur $[0;45]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{5} + 10x + 120$$

1. Déterminer le montant des coûts fixes.
2. Déterminer le coût total de production quand l'entreprise produit 10 moteurs, puis 30 moteurs.

3. En déduire coût unitaire de production quand l'entreprise produit 10 moteurs, puis 30 moteurs.
4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	15	20	30	40	45
$f(x)$						

5. Construire la courbe représentative de f dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
6. Chaque moteur est vendu 24€. On admet qu'il vend chaque jour tous les moteurs produits. On note $CA(x)$ le chiffre d'affaires réalisé par la vente de x moteurs.
   (a) Montrer que $CA(x) = 24x$.
   (b) Sur le même dessin, faire la représentation graphique de CA.
   (c) Déterminer à partir de quel nombre de moteurs produits l'entreprise Motrélec réalise des bénéfices.
7. On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par la vente de x moteurs.
   (a) Vérifier que :
   $$B(x) = -\frac{x^2}{5} + 14x - 120$$
   (b) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	10	20	30	35	45
$B(x)$						

   (c) Construire la courbe représentative de B dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Déterminer graphiquement pour quelle valeur de x l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

Exercice 3. (10 points)

Une PME produit des lampes design. Elle en fabrique entre 0 et 30 par semaine. Le coût total de production production de x lampes, exprimé en euros, est estimé par la fonction C définie sur $I = [0;30]$ par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 100$$

1. Vérifier que $C(x) = (x+30)^2 - 800$
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	5	10	15	20	25	30
$C(x)$							

3. Construire la courbe représentative de C dans le plan $\mathscr{P}$, muni d'un repère orthogonal.
4. On appelle f la fonction représentant le coût moyen, exprimé en euros, d'une lampe sur l'intervalle $[1;30]$.
   (a) Déterminer la fonction f.
   (b) Compléter le tableau de valeurs suivant (on arrondira les valeurs à 10^{-1} près) :

x	1	3	5	7	9	10	11	13	15	20	25	30
$C(x)$												

   (c) Construire la courbe représentative de f dans le plan $\mathscr{P}_2$, muni lui encore d'un repère orthogonal.
   (d) Déterminer graphiquement les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
   (e) Combien de lampes la PME doit-elle produire pour rendre le coût de production unitaire minimal ?

Exercice 4. **Question Cactus**

Donner l'exemple d'une fonction f vérifiant pour tout $x \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$