Chapitre 2

Les suites, en particulier les suites arithmétiques et géométriques

Hors Sujet

Titre : « Ashgar Farhadi »
Auteur : UNE SÉPARATION
Présentation succinte de l'auteur : Asghar Farhadi a fait ses études de théâtre, avec un diplôme du 1er cycle en arts dramatiques et une maîtrise de mise en scène théâtrale à l'Université de Téhéran et l'Université Tarbiat Modarres. Farhadi a tourné des courts métrages de 8 mm et 16 mm au Département de la société du cinéma de jeunesse d'Ispahan avant d'entamer l'écriture des pièces de théâtre et des scénarios pour la télévision iranienne, IRIB. Danse dans la poussière est son premier film réalisé, suivi par le film acclamé par les critiques, Les enfants de Belle Ville. Son troisième film, La Fête du feu obtient le Hugo d'or au Festival international du film de Chicago en 2006. À propos d'Elly, pour lequel il reçoit l'Ours d'argent du meilleur réalisateur à Berlin en 2009, prend pour sujet le voyage d'un groupe d'Iraniens au bord de la mer Caspienne tournant à la catastrophe. En 2011, Farhadi revient à la Berlinale pour y présenter Une séparation. Le film gagne l'Ours d'or et les Prix d'interprétation féminine et masculine pour l'ensemble de la distribution. Puis il reçoit, en 2012, le Golden Globe, le César et l'Oscar du meilleur film étranger.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Calculer les termes d'une suite générée par récurrence.
- ⇝ Construire et exploiter la représentation graphique d'une suite définie par récurrence
- ⇝ Algorithme

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »
John Louis von Neumann

Leçon 2

Les suites, en particulier les suites arithmétiques et géométriques

Au fil du temps

Vous allez dans ce chapitre, découvrir les suites, qui sont présentes dans bien des sciences, par exemple en biologie des populations pour décrire le cycle de reproduction des lapins, en astronomie dans les loirs de répartition des planètes, en physique dans la théorie des particules élémentaires, en informatique dans les algorithmes et simulations (et via les ordinateurs, dans toutes nos activités numériques). Mais cette omniprésence n'est pas un hasard, car tous ces domaines se servent d'équations mathématiques. Or les suites occupent une place de choix en mathématiques depuis plus de 2000 ans.

Pourquoi un tel intêret, alors qu'il s'agit simplement de ranger une succession de nombres liés par un loi, comme quand on énumère les jours du mois ? Parce que cette simplicité n'est qu'apparente : l'étrange n'est jamais loin.
Prenons par exemple la suite des « puissances de un demi » : $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\dots;\frac{1}{2n};\dots$ et la série associée $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2n}+\dots$ Si ces nombres représentaient des tiges en bois mesurant chacune la moitié de la précédente (en commençant par 1 mètre), n'est-ce pas étonnant que la longueur maximale qu'on puisse atteindre en les mettant bout à bout ne dépasse pas 2 mètres, même avec une infinité de tiges ? Cela a stupéfait les savants qui l'ont découvert au XVIII^e siècle. Comment admettre que l'infini (le nombre de tiges) puisse être contenu dans le fini (2 mètres) ? Il s'en est suivi de violentes disputes entre les pro-infini et les contre, qui n'ont fait que s'amplifier jusqu'au XX^e siècle. Bref, ce sont les suites qui ont introduit l'infini dans l'arithmétique et l'analyse ...

Mais si le XVIII^e siècle est un tournant dans l'histoire des suites et de l'infini, leur origine remonte à Archimède de Syracuse, le mathématicien grec du III^e siècle avant JC. Archimède voulait résoudre une question qui n'avait rien à voir avec l'infini, le problème de la quadrature du cercle, grande énigme des maths anciennes : étant donné un cercle, comment construire une figure de même surface mais composée de carrés ou de triangles (figures que les Grecs savaient bien mesurer). Tel était le but d'Archimède ... Mais à la place, il a découvert les suites et, sans le savoir, il a mis les mathématiciens sur la voie de l'infini.
Comment cela s'est-il produit ? Archimède pensait que la bonne méthode pour « quarrer »le cercle était de l'encadrer entre deux figures faites de triangles, puis de faire converger la taille de ces triangles jusqu'à les faire coïncider (comme si l'on cherchait à emprisonner un objet entre des murs qui se rapprochent). Archimède choisit comme figures connues et quarrables pour coïncer le cercle, les polygones réguliers, faits de triangles disposés en pétales de fleur, en commençant par l'hexagone (six côtés, six triangles équilatéraux) : il encadre le cercle entre l'hexagone inscrit et l'hexagone circonscrit. Ensuite, il passe au dodécagone (12 côtés), puis il enchaîne sur le polygone à 24 côtés, puis 48 et enfin 96. A chaque pas, les mesures se rapprochent, mais jamais elles ne s'égalent ... Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π.
Las, Archimède ne résoudra jamais le problème de la quadrature du cercle, et pour cause. Les mathématiciens du XIX^e siècle démontreront qu'il n'a pas de solution, d'où l'expression « C'est la quadrature du cercle ! ». Mais Archimède a bel et bien inauguré l'histoire des suites, car dans sa méthode, il montre comment calculer la surface du polygone n en fonction de celui qui précède (le $n-1^{eme}$). Le terme u_n défini par le terme u_{n-1}, c'est bien là une suite, la première du genre, et qui peut être prolongée autant que l'on veut ... jusque dans l'infini.

Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice. On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I. Introduction

I.1. Introduction historique

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'un certain Archimède (j'en entends déjà se dire d'ici : « encore lui ! », eh oui. . .). Dans son traité La mesure du cercle, pour trouver une valeur approchée de π, il inscrit dans un cercle de rayon 1 un triangle équilatéral dont il calcule le périmètre. Puis en doublant le nombres de côtés, il calcule le périmètre d'un hexagone, puis celui d'un dodécagone et ainsi de suite, indéfiniment. Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π.
Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice.
On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I.2. Introduction

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$-3, 1, 5, 9, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$\text{suite de Fibonacci} \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$\text{suite de Stern} \quad 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, , \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

En mathématiques, une **suite** u est une **liste ordonnée de nombres réels** : les éléments de cette liste :

- ⇝ Sont appelés **termes**
- ⇝ Sont repérés par leur rang dans la liste

Le 1^{er} terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1),
Le $2^{ème}$ terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2)
. . . .
. . . .
Le $n^{ème}$ terme de la suite u est souvent noté u_{n-1} (ou u_n)

Le terme précèdent u_n est u_{n-1}, le suivant u_{n+1}.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour signifier que le rang d'un terme de la suite u est un entier naturel (sans "fin" de liste). On a donc :

$$\overbrace{u}^{\text{nom de la suite}} = (\overbrace{u_0}^{1^{\text{er}}\text{ terme}} ; \overbrace{u_1}^{2^{\text{nd}}\text{ terme}} ; u_2 ; \ldots ; u_{n-1} ; \overbrace{u_n}^{\text{terme de rang } n} ; u_{n+1} ; \ldots)$$

Exemple :

En reprenant les exemples précédents :

- La première suite est la suite des puissances de 2, on définit alors cette suite u par :

$$u_n = 2^n$$

Une autre manière de définir cette suite est de remarquer que chaque terme est le double du précédent ; on peut alors définir cette suite par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \end{cases}$$

- La seconde suite est la suite des carrés des premiers entiers, ainsi :

$$u_n = n^2$$

- La troisième suite admet pour premier terme -3 et pour calculer le suivant on ajoute toujours 4 :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$

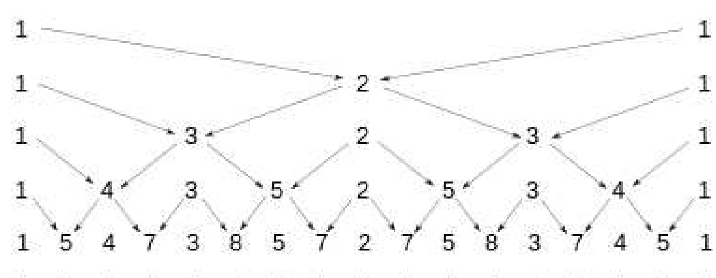
On peut aussi la définir de la manière suivante :

$$u_n = -3 + 4n$$

- La suite de Fibonacci se définit par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

- La suite de Stern se définit par :



Construction de la suite de Stern. La suite s'obtient en lisant chaque ligne successivement de gauche à droite. Les 1 de la colonne de droite sont à identifier avec les 1 de la colonne de gauche et ne sont pas pris en compte dans la liste des éléments de la suite.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{2n} = u_n \\ u_{2n+1} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

II. Suites numériques

II.1. Définition

Définition 1.

Une suite numérique est une suite liste ordonnée de nombre réels.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite u est en fait une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain entier p . A chaque entier $n \geq p$, la suite u associe un réel $u(n)$, que l'on note u_n.
u_n est appelé terme d'indice n ou de rang n de la suite. u_p est le premier terme, ou le terme initial de la suite. On note $(u_n)_{n\geq p}$ l'ensemble des termes de la suite.

Exercice 1. Déterminer le rang à partir duquel la suite u suivante est définie :

$$u_n = \sqrt{n-4}$$

II.2. Mode de génération d'une suite numérique

On distingue principalement deux manières de définir les suites : de manière explicite ou par récurrence.

Définition 2. (Formule explicite)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est définie de manière explicite lorsqu'il existe une fonction f définie sur $[p;+\infty[$ telle que :

$$\forall n \geq p, \text{ on a } u_n = f(n)$$

Exemple :

On se donne $u_n = -2n+1$ pour $n \geqslant 0$ (ici $u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x+1$.)
On a ainsi $u_0 = -2\times 0+1 = 1$, $u_1 = -2\times 1+1 = -1$, $u_2 = -2\times 2+1 = -3$, $u_3 = -6+1 = -5$, $u_4 = -8+1 = -7$, $\ldots u_{100} = -199\ldots$, etc

Remarque : On peut alors calculer chaque terme de la suite par rapport à son indice.

Définition 3. (Par récurrence)

Soit f une fonction définie sur un ensemble I telle que si $x \in \mathrm{I}$ alors $f(x) \in \mathrm{I}$.
Soit a un nombre réel de I et $p \in \mathbb{N}$.

On peut alors définir une suite u en posant : $\begin{cases} u_p = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \geq p \end{cases}$

Exemple :

On se donne $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$ (ici $u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x+1$.)
On a ainsi $u_1 = -2u_0+1 = -2\times 1+1 = -1$, $u_2 = -2u_1+1 = -2\times(-1)+1 = 3$, $u_3 = -2u_2+1 = -2\times 3+1 = -5$, etc

Remarques :

- En fait on se donne la valeur du premier terme et un procédé appelé **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent.
- On visualise ainsi facilement le lien logique entre les termes.
- Dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100}, il faut connaître u_{99}, et pour calculer u_{99}, il faut connaître u_{98}, ainsi de suite ...Il est alors préférable d'exprimer u_n en fonction de n pour calculer u_{100} directement.

Avec une calculatrice

Avec une TI :

Par défaut, la calculatrice est en mode fonction. Il faut passer en mode *suite* en appuyant sur **Mode** puis mettre `Suite` en surbrillance.
Pour entrer l'expression de la suite (u_n), on procède désormais comme pour une fonction : on appuie sur $\boxed{f(x)}$ ce qui nous permet d'entrer le premier indice, l'expression de la suite et éventuellement son premier terme.
Le n s'obtient avec la touche $\boxed{x,\ t,\ \theta,\ n}$ et le u s'obtient en appuyant sur **2nde** + $\boxed{7}$ *(on met l'indice entre parenthèses).*
On obtient le tableau de valeurs dans

Table = **2nde** + **Graphe**.

Avec une Casio :

On choisit le mode *suite* en sélectionnant le menu `Recur`.
On choisit ensuite le type de suite (explicite ou récurrente) grâce à la touche **F3 : `Type`** puis la touche **F1** (explicite) ou **F2** (récurrente).
On entre ensuite l'expression de la suite et on appuie sur **F5 : `SET`** pour paramétrer le tableau, notamment donner le premier indice et/ou premier terme si nécessaire.
Le n s'obtient avec la touche ***F1 : n*** *et le a_n s'obtient avec la touche* ***F2 : a_n***
On peut alors afficher les valeurs de la table grâce à **F6 : `TABL`**

Exercice 2. Soit la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Exprimer v_n, v_{n-1}, v_{2n} et v_{3n-1} en fonction du terme approprié de la suite (v_n).

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-2)^n + 3$ et la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = -2v_n + 9 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Pour chacune des suites u et v :
   (a) Déterminer les valeurs des trois premiers termes.
   (b) Vérifier à la calculatrice les réponses de la question précédente.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les suites u et v ? Démontrer cette conjecture.

III. Suite Arithmétique

III.1. Découverte des suites arithmétiques au travers d'un exemple

Exercice 4. Dans le pays des merveilles d'Alice, le lapin blanc, depuis le temps, a fait des enfants (enfin des adolescents plutôt...). Du plus vieux au plus jeune : le lapin bleu, le lapin rouge, le lapin vert et le lapin noir. A l'adolescence chacun des 4 lapins a réclamé de l'argent de poche. Noter que les lapins du pays des merveilles sont adolescents de 0 à 4 ans, ils deviennent enfants par la suite et n'ont jamais été adultes.
Le lapin blanc a décidé de donner au lapin bleu dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

- ⇝ 3 carottes la première semaine ;
- ⇝ Chaque semaine deux carottes de plus que la semaine précédente.

On admet qu'au pays des merveilles chaque année est constituée d'exactement 52 *semaines et chaque mois de* 4 *semaines. Remarquons que les lapins du pays des merveilles ont un treizième mois...*
On note $u_0 = 3$ et u_n le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour où il fête ses n semaines.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; calculer u_1 ; u_2 et u_3. Combien de carottes le lapin bleu a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n. Vérifier cette formule en recalculant u_1 ; u_2 et u_3.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
   (a) A partir de quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
   (b) Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin bleu au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{207} = \sum_{i=0}^{i=207} u_i$$
   (c) Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin bleu (fort économe) met toutes les autres de côté.
   Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin bleu.
   (d) Grand amateur de montre, le lapin bleu décide de troquer ses carottes contre des montres au cours suivant, 1 montre contre 540 carottes. Déterminer le nombre de montres que le lapin bleu a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

III.2. Définition

Définition 4.

Une suite arithmétique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant la même constante appelée raison.
Si on note u une suite arithmétique de raison r définie pour tout entier n on a donc, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

Remarque : Si u est suite arithmétique de raison r alors pour tout n on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$$

Si la raison $r > 0$ alors la suite arithmétique est strictement croissante, au contraire si $r < 0$ la suite arithmétique est strictement décroissante. Dans le cas où $r = 0$ il s'agit d'une suite constante.

Exercice 5. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Dans le cas d'une réponse positive préciser leur raison et leur sens de variation.

1. $u_n = 3n - 2$
2. $u_n = n^2 - 3$
3. $u_n = -4n + 1$

III.3. Expression explicite en fonction de n

On considère une suite arithmétique u de raison r et de premier terme u_0, on a alors :

$$\begin{aligned} & u_1 = u_0 + r \\ \Longrightarrow\ & u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r \\ \Longrightarrow\ & u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r \\ \Longrightarrow\ & u_4 = u_3 + r = u_0 + 3r + r = u_0 + 4r \\ \Longrightarrow\ & \ldots\ldots\ldots \\ \Longrightarrow\ & u_n = u_{n-1} + r = u_0 + (n-1)r + r = u_0 + nr \end{aligned}$$

Propriété 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors

$$u_n = u_0 + nr$$

Exercice 6. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calculer u_{2013}

Théorème 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Preuve

D'après la propriété précédente on a pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_p = u_0 + pr \qquad \text{et} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Par conséquent

$$u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr = (n-p)r \Longleftrightarrow u_n = u_p + (n-p)r$$

Exercice 7. Considérons une suite arithmétique (v_n) telle que $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$
Calculer v_7 et v_{74}

Théorème 2.

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - an - b = a$$

III.4. Somme de termes successifs

Remarque : Soit (u_n) une suite. La somme $u_1 + u_2$ comporte deux termes, de même la somme $u_1 + u_2 + u_3$ en comporte 3. De manière générale la somme $u_1 + u_2 + \dots u_p$ comporte p termes.
Combien en comporte la somme :$u_{14} + u_{15} + \cdots + u_{25}$? On peut remarquer que cette somme s'écrit encore :

$$u_{1+13} + u_{2+13} + \cdots + u_{13+12}$$

Par conséquent elle comporte 12 termes, i.e $25 - 14 + 1$ termes.

Propriété 2.

La somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$ comporte donc $q - p + 1$ termes (p et q sont des nombres entiers tels que : $p < q$)

Propriété 3. (Somme des n premiers entiers)

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve

Notons $S = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n$, on a $2S = 1 + 2 + \cdots + n + 1 + 2 + \cdots + n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1) = n(n+1)$ donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exemple :

La somme des 100 premiers entiers est donc :

$$\frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Théorème 3.

On considère une suite arithmétique u et S la somme des termes successifs (à partir de celui de rang p jusqu'à celui de rang n) que l'on note :

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i$$

On a alors :

$$S = \frac{(n-p+1)(u_p + u_d)}{2}$$

Preuve

On a :

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

En notant r la raison on obtient :

$$S = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + u_n$$

En inversant l'ordre des termes de cette somme, S s'écrit aussi :

$$S = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_p + 2r) + (u_p + r) + u_p$$

Effectuons alors la somme, membre à membre terme à terme, des deux égalités précédentes :

$$2S = (u_p + u_n) + (u_p + r + u_n - r) + (u_p + 2r + u_n - 2r) + \cdots + (u_n - 2r + u_p + 2r) + (u_n - r + u_p + r) + (u_n + u_p)$$

Cette somme comporte $n - p + 1$ termes tous égaux à $u_p + u_n$, par conséquent :

$$2S = (n-p+1)(u_p + u_n) \Longleftrightarrow S = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$

Exercice 8.

1. Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme des 50 premiers entiers pairs en partant de 12

Exercice 9. En reprenant le contexte de l'exercice introductif. La lapin blanc décide pour son second, le lapin rouge de donner dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

- ⇝ 417 carottes la première semaine ;
- ⇝ Chaque semaine deux carottes de moins que la semaine précédente.

On note v la suite telle que v_n vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa $n-$ième semaine. Notons que $v_1 = 417$ et que v_0 n'existe pas.

1. Justifier que v_n est une suite arithmétique ; préciser sa raison et son sens de variation.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
   (a) Jusqu'à quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
   (b) Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin rouge au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} v_i$$
   (c) Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin rouge (fort économe comme son frère) met toutes les autres de côté.
   Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin rouge.
   (d) Grand amateur de montre, le lapin rouge décide de troquer ses carottes contre des montres mais l'inflation existe au pays des merveilles. Il faut 10% de carottes supplémentaires pour obtenir une montre qu'au temps du lapin bleu. Le lapin rouge est-il perdant par rapport à son frère ?
4. Le lapin blanc constatant l'injustice subit par le lapin rouge décide d'utiliser une autre méthode pour les « carottes de poches » du lapin suivant, le lapin vert. Il le rémunère de sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans de la manière suivante :
   - ⇝ 1 carotte la première semaine ;
   - ⇝ Chaque semaine trois carottes de plus que la semaine précédente ;
   - ⇝ 100 carottes les 6 derniers mois.

   On note w la suite telle que $w_0 = 1$ et w_n désigne le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour où il fête ses n semaines.
   (a) La suite w est-elle arithmétique ?
   (b) Plus précisément déterminer le rang jusqu'au quel w se comporte comme une suite arithmétique.
   (c) Identique à ses frères le lapin rouge économise dès qu'il reçoit plus de 300 carottes par semaine. Mais durant les 6 derniers mois il mange un peu de ses économies de manière à manger 300 carottes exactement par semaine. Sachant que le cours de la carotte a encore augmenté de 50% déterminer le nombre de montre que le lapin rouge possèdera au moment de devenir enfant.

IV. Suite Géométrique

IV.1. Découverte des suites géométriques au travers d'un exemple

Exercice 10. Vient le tour du derrnier né du lapin blanc, le lapin noir. Détestant les habitudes le lapin blanc modifie une nouvelle fois le système des « carottes de poches » et le lapin noir se voit proposer le système suivant :

- 3 carottes la première semaine ;
- Chaque semaine $3,5\%$ de carottes en plus de la semaine précédente (le lapin blanc donnera s'il le faut des morceaux de carottes...)

On note t la suite telle que t_n vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa $n-$ième semaine. Notons que $t_1 = 3$ et que t_0 n'existe pas.

1. Calculer t_1 ; t_2 et t_3 puis exprimer t_{n+1} en fonction de t_n. Combien de carottes le lapin noir a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant t_n en fonction de n. Vérifier cette formule en recalculant t_1 ; t_2 et t_3.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin noir le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
   (a) A partir de quel âge le lapin noir peut-il se nourrir à satiété ?
   (b) Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin noir au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$S = t_1 + t_2 + \cdots + t_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} t_i$$
   (c) Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin noir (comme les autres) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin noir.
   (d) Par rapport au lapin précédent, le cours de la carotte a encore augmenté de 10%. Déterminer le nombre de montres que le lapin noir a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

IV.2. Définition

Définition 5.

Une suite géométrique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un coefficient constant appelé raison. Ainsi, une suite géométrique u de raison q et de premier terme a a la forme suivant :

$$a \quad aq \qquad aq^2 \qquad aq^3 \qquad aq^4$$

La définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, c'est-à-dire que pour chaque entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :

La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2 : $u_{n+1} = 2 \times u_n$
Donner les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $0,5$.

Exercice 11.

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ est géométrique

2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On note
   $$w_n = v_n + 2$$
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique

Exercice 12. Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times (-1)^n$ est géométrique. On précisera sa raison.

IV.3. Expression explicite en fonction de n

Théorème 4.

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels non nuls.
(u_n) est une suite géométrique de raison q

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = qu_n$. Par conséquent la suite est géométrique de raison q

Théorème 5.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0 alors

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Preuve

On peut raisonner de proche en proche. On a :

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0 q\\
&u_2 = u_1 q = u_0 q^2\\
&u_3 = u_2 q = u_0 q^3\\
&\dots\\
&u_{n-1} = u_{n-2} q = u_0 q^{n-2}\\
&u_n = u_{n-1} q = u_0 q^{n-1}
\end{aligned}$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. On a alors :

$$u_n = 2 \times 3^n$$

On peut, par exemple calculer directement $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

Théorème 6.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors quels que soient les entiers naturels n et p on a :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Preuve

D'après le théorème précédent, on a :

$$u_n = u_0 q^n \qquad \text{et} \qquad u_p = u_0 q^p$$

donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \dfrac{u_p}{q^p}$; d'où $u_n = \dfrac{u_p}{q^p} q^n = u_p \times q^{n-p}$

Exercice 13. (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques. Déterminer u_5, u_8, v_7 et v_{15} sachant que :

1. $u_0 = 6$ et $q = -\dfrac{1}{3}$
2. $v_5 = 1$ et $v_{10} = 32$

IV.4. Somme de termes successifs

On s'interesse à la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q, avec $q \neq 1$

Propriété 4. (Cas particulier $u_n = q^n$, avec $q \neq 1$)

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Preuve

Notons $\mathrm{S} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}$, on a $q\mathrm{S} = q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$
Par conséquent

$$(1-q)\mathrm{S} = \mathrm{S} - q\mathrm{S} = 1 - q^n \Longleftrightarrow \mathrm{S} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exemple :

La somme des 10 premiers termes de cette suite géométrique lorsque $q = 2$ est donc :

$$\frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023$$

Théorème 7.

La somme des termes consécutifs, du terme de rang p au terme de rang n, d'une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Preuve

On calcule donc S, la somme des $n-p+1$ termes consécutifs, de premier terme u_p, d'une suite géométrique de raison q où $q \neq 1$

$$\mathrm{S} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \cdots + u_p \times q^{n-p+1-1} = u_p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p+1-1}) = u_p \frac{1-q^{n-p}}{1-q}$$

Remarque : Le cas $q = 1$ est trivial, en notant le premier terme de la somme a :

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a + a + \cdots + a = na$$

Exercice 14. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$. Calculer $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$

IV.5. Convergence

Théorème 8.

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ alors :

- Si $q \in]-1;1[$ la suite (u_n) est convergente vers 0
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et donc convergente vers 1, si $q = -1$ la suite diverge (elle vaut tantôt 1 tantôt -1).
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est divergente (vers $+\infty$), enfin si $q < -1$ la suite diverge (un terme sur deux est négatif, l'autre est positif).

Pour cette démonstration, nous n'étudierons que le cas où $q > 0$, nous allons utiliser le résultat suivant [1]

Lemme 1. (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

***Preuve* du lemme**

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie
$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes
Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& (1+x)^n \geq 1+nx \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \text{puisque } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Remarque : Le type de raisonnement que l'on vient d'effectuer s'appelle le raisonnement par récurrence, il sera étudié amplement en terminale.

1. un résultat servant une démonstration est usuellement appelé Lemme

Preuve du théorème

⇝ $q > 1$

Posons $x = q - 1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$

⇝ $q \in [0;1[$

Si $q = 0$ le résultat est évident, sinon posons $q' = \dfrac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1;+\infty[$

D'après le résultat précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$$

Par passage à l'inverse nous obtenons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0

⇝ $q = 1$, le résultat est alors évident.

Exercice 15. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. On note s_n la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

1. Exprimer s_n en fonction de n
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} s_n$

IV.6. Application

Exercice 16. Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bails.
1$^{\text{er}}$ contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
2$^{\text{ème}}$ contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail [2].

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, i.e le loyer du 36$^{\text{ème}}$ mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (*Justifier par des calculs*)

Exercice 17. On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n \qquad \forall n \geq 1$$

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n ; en déduire u_{64}.
3. **La légende du jeu d'échec** : *Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, et ainsi de suite jusqu'à la* 64^{ième} *case. Le roi sourit de la modestie de la demande.*
   Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

Exercice 18. Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît après la mort du tissu de 1,24% en 100 ans.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, de 2000 ans et de 10000 ans.
2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.
3. Un fossile ne contient plus que 10% de ce qu'il devrait contenir en carbone 14. Estimer son âge.

Exercice 19. Premières étapes de la construction du triangle de Sierpinski :

1. On note u la suite qui donne le nombre de triangle noir à l'étape n. Quelle est la nature de u ; préciser ses éléments caractéristiques.
2. On note v la suite qui donne la longueur d'un côté du triangle noir à l'étape n. Quelle est la nature de v ; préciser ses éléments caractéristiques.
3. On note w la suite qui donne l'aire d'un triangle noir à l'étape n. Quelle est la nature de w ; préciser ses éléments caractéristiques.
4. On note t la suite qui donne l'aire du domaine couvert par les triangles noirs à l'étape n. Quelle est la nature de t ; préciser ses éléments caractéristiques.

2. Un bail est un contrat de location

V. Suite Arithmético-géométrique

Exercice 20. Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à aillette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves.
On suppose que la population u lors de l'année n de Schblrurbs suit la loi suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite u pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et des paramètres a et b.
On cherche à estimer la population de Schblurbs dans l'avenir lointain, par deux techniques différentes dont l'une utilise la suite auxiliaire suivante :
la suite v est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

1. **Cas 1** : $u_0 = 0,7$; $a = -0,2$ et $b = 0,4$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   (b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.
   iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.
   iv. Déterminer cette limite par le calcul.
   (c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :
   $$v_n = u_n - \frac{1}{3}$$
   (d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
   (e) Exprimer v_n en fonction de n.
   (f) En déduire que
   $$u_n = \frac{11}{30} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$$
   (g) En déduire la limite ℓ de la suite u.
2. **Cas 2** : $u_0 = 0,7$; $a = 1,5$ et $b = -0,2$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   (b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.
   iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.
   (c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :
   $$v_n = u_n - \frac{2}{5}$$
   (d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
   (e) Exprimer v_n en fonction de n.
   (f) En déduire que
   $$u_n = \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$
   (g) En déduire la limite ℓ de la suite u.
3. **Cas 3** : $u_0 = 0,3$; $a = 1,5$ et $b = -0,2$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.

(b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.

iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.

(c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :

$$v_n = u_n - \frac{2}{5}$$

(d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.

(e) Exprimer v_n en fonction de n.

(f) En déduire que

$$u_n = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$

(g) En déduire la limite ℓ de la suite u. Conclure.

4. **Cas 4** : $u_0 = 0,3$; $a = -0,5$ et $b = 7$.

(a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.

(b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.

iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.

iv. Déterminer cette limite par le calcul.

(c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :

$$v_n = u_n - \frac{14}{3}$$

(d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.

(e) Exprimer v_n en fonction de n.

(f) En déduire que

$$u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

(g) En déduire la limite ℓ de la suite u. Conclure.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien