Chapitre 1

Second degré

Hors Sujet

Titre : « Alphaville »
Auteur : Jean Luc Godard
Présentation succinte de l'auteur : Alphaville, une étrange aventure de Lemmy Caution (ou Alphaville) est un film franco-italien de science-fiction de Jean-Luc Godard sorti en 1965. Il a reçu l'Ours d'or 1965 au Festival international du film de Berlin.

Dans une époque postérieure aux années 1960, les autorités des « pays extérieurs » envoient le célèbre agent secret Lemmy Caution (Eddie Constantine) en mission à Alphaville, une cité déshumanisée, éloignée de quelques années-lumière de la Terre. Caution est chargé de neutraliser le professeur von Braun, tout-puissant maître d'Alphaville, qui y a aboli les sentiments humains. Un ordinateur, Alpha 60, régit toute la ville. Un message de Dickson, un ex-agent secret, ordonne à Lemmy de « détruire Alpha 60 et de sauver ceux qui pleurent ». Mais ce dernier est enlevé, interrogé par Alpha 60 et condamné à mort.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Résoudre des équations du second degré.
- ⇝ Etudier le signe d'un trinôme.
- ⇝ Maitriser l'allure de la courbe d'une fonction polynôme du second degré.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 1

Second degré

Au fil du temps

Nous allons étudier les polynômes du second degré, ie de la forme ax^2+bx+c, oà¹ a, b et c sont des constantes connues (et $a \neq 0$).
La représentation graphique de ce genre de fonction est une parabole, courbe que l'on retrouve dans la nature, comme par exemple la trajectoire des jets d'eau d'une fontaine, des astres, les rebonds d'une balle de tennis, les dunes de sables dans le désert ... Les antennes pour le cà¢ble sont également en forme de parabole, d'oà¹ leur nom.
On a découvert les paraboles dès l'antiquité, grà¢ce à *Appolonius de Perga*, qui étudiait les sections planes du cône. Au V$^{\text{è}me}$ siècle, la pensée mathématique s'épanouit dans le moyen orient, sous l'impulsion géniale d'*Al Khwarizmi*. Son nom est à la base du mot algorithme. En effet, c'est lui qui le premier s'intéressa à mettre en place une méthode générale de résolution d'équations en fonction de leur type.
La nouveauté apportée par Al-Khwarizmi correspond à une véritable évolution des mentalités : il ne s'agit plus de résoudre des problèmes arithmétiques ou géométriques que l'on peut traduire en équations, mais de partir des équations, dont chacune recouvre une classe infinie de problèmes variés.
Il est également le premier à résoudre couramment des équations du second degré dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, *Al Khwarizmi* à trouver un algorithme permettant de résoudre toutes les équations de la forme $ax^2+bx+c=0$, et lorsque l'on a sur un problème qui aboutit à une telle équation, il n'y a plus qu'à le suivre ! C'est cet algorithme que nous allons découvrir.
Au XVII^e siècle, *Newton* démontre que la trajectoire d'un corps seulement soumis à son poids est une parabole. A cette époque, on sait déjà résoudre depuis environ un siècle les équations du second degré dans un ensemble de nombres que vous découvrirez, contenant $\mathbb{R}$ et de nouveaux nombres, appelés imaginaires (par opposition à réels) ou encore complexes.

Type de problèmes que l'on souhaite résoudre

Situation 1 : Le libraire achète des livres pour 80 €. Avec 4 livres de plus, pour le même prix total, chaque livre aurait coûté 1 € de moins.

Modélisation : En notant x le nombre de livre acheté par le libraire, il suit qu'un livre coute $\frac{80}{x}$ €. Avec 4 livres de plus c'est-à-dire avec $x+4$ livres, le prix total étant identique, chaque livre couterait $\frac{80}{x+4}$, et donc puisque le prix d'un livre aurait baissé d'un euro il suit que :

$$\frac{80}{x} = 1+\frac{80}{x+4} \iff 80 = x+\frac{80x}{x+4} \iff 80(x+4) = x(x+4)+80x \iff x^2+4x-320=0$$

Situation 2 : Le produit de l'âge de Clément dans 10 ans par celui qu'il avait il y a 10 ans est égal à 44. Quel est l'âge de Clément ?

Modélisation : En notant x l'âge de Clément dans le présent, il suit que $(x-10)(x+10) = 44 \iff x^2-100 = 44 \iff x^2 = 144 \iff x = \pm 12$

Situation 4 : Avec 5 km/h de plus le train mettrait 2 heures de moins sur un trajet de 300 km. Quelle est sa vitesse ?

Modélisation : En notant v sa vitesse, et puisque $v = \frac{d}{t}$, on obtient d'une part $v = \frac{300}{t}$ et d'autre part $v+5 = \frac{300}{t-2} \iff v = \frac{300}{t-2}-5$.

Ainsi $\frac{300}{t} = \frac{300}{t-2}-5 \iff 300 = \frac{300t}{t-2}-5t \iff 300(t-2) = 300t-5t(t-2) \iff -600 = -5t^2+10t \iff 5t^2-10t-600 = 0 \iff t^2-2t-120 = 0$

Situation 3 : Un rectangle a pour périmètre $\mathrm{P} = 21$ m et pour aire $\mathrm{S} = 27$ m^2. Quels sont les dimensions de ce rectangle ?

Modélisation : Soient x et y les dimensions de ce rectangle, on obtient :

$$x+y = \frac{\mathrm{P}}{2} = 10,5 \text{ et } xy = \mathrm{S} = 27$$

En remplaçant y par $10,5-x$ on obtient l'équation $x(10,5-x) = 27$ qui peut s'écrire encore $x^2-10,5x+27 = 0$ Comment résoudre une telle équation ?

En utilisant la forme canonique :

Notons P la fonction polynôme définit par $\mathrm{P}(x) = x^2-10,5x+27$.

$$\begin{aligned} & x^2-10,5x+27 = 27 \\ \iff\ & x^2-10,5x = 0 \\ \iff\ & x(x-10,5) = 0 \\ \iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 10,5 \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $\mathrm{P}\left(\frac{21}{4}\right) = -\frac{9}{16}$, que :

$$\mathrm{P}(x) = \left(x-\frac{21}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$$

A partir de la forme canonique du polynôme P on résout l'équation $x^2 - 10,5x + 27 = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{21}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = 0 \\ \iff & \left(x - \frac{21}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \\ \iff & x - \frac{21}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad x - \frac{21}{4} = -\frac{3}{4} \\ \iff & x = \frac{24}{4} = 6 \quad \text{ou} \quad x = \frac{18}{4} \end{aligned}$$

De plus si $x = 6$ alors $y = 10,5 - 6 = 4,5$ et si $x = \frac{18}{4} = 4,5$ alors $y = 10,5 - 4,5 = 6$.

Conclusion : Le rectangle d'aire $S = 27$ et de périmètre 21 a pour longueur 6 et pour largeur 4,5.
But : On cherche à automatiser ce genre de démarche.

I. Trinôme du second degré

Définition 1.

On appelle trinôme du second degré ou polynôme du second degré toute expression pouvant s'écrire $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Exemples :

1. $x^2 - 4x + 1$ $\quad (a = 1; b = -4; c = 1)$
2. $-7x^2 + 4x$ $\quad (a = -7; b = 4; c = 0)$
3. $\sqrt{2}x^2$ $\quad (a = \sqrt{2}; b = 0; c = 0)$
4. $(x+1)^2$ $\quad (a = 1; b = 2; c = 1)$
5. $3x + 1$ est un binôme du premier degré
6. $x^3 + 2x + 3$ est un polynôme du $3^{ème}$ degré
7. $(x+1)^2 - x^2$ est un binôme du premier degré.
8. $2x^2 + \frac{1}{x}$ n'est pas un trinôme du 2^{nde} degré.

Rappel

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ deux trinômes du second degré.
P et Q sont égaux si, et seulement si $a = a'; b = b'$ et $c = c'$

Exercice 1. Soit $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Démontrer que $P = Q$

Définition 2.

On appelle racine du trinôme toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Exemple :

3 est racine du trinôme $2x^2 - 5x - 3 = 0$

Exercice 2. Trouver les racines du polynôme $x^2 - 7 = 0$

? Question :

D'une manière générale, comment trouver les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$? Existe-t-il un algorithme permettant de trouver les racines de n'importe quel trinôme ?

II. Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

II.1. Résolution de l'équation $X^2 = a$

Propriété 1.

L'équation $X^2 = a$ admet :

- $\rightsquigarrow$ 2 solutions si $a>0$: $\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$.
- $\rightsquigarrow$ 1 solution si $a=0$, il s'agit de 0.
- $\rightsquigarrow$ 0 solution si $a<0$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2-7=0$;
2. $(4x+1)^2-1=0$;
3. $3(x-1)^2-7$;
4. $(x+1)^2+1=0$

Exercice 4. « Canoniser »le trinôme $x^2-7x+12$ et déterminer ses racines.

II.2. Résolution de $ax^2+bx+c=0$

On a vu que :

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & ax^2+bx+c=0 \\ \iff & a(x-\alpha)^2+\beta=0 \\ \iff & a(x-\alpha)^2=-\beta \\ \iff & (x-\alpha)^2=-\frac{\beta}{a} \qquad \text{on sait que } a\neq 0 \end{aligned}$$

Comme vu dans le paragraphe précédent l'équation :

$$(x-\alpha)^2=-\frac{\beta}{a} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

admet deux solutions si le nombre $-\frac{\beta}{a}>0$, une s'il est nul et zéro sinon.

Or, $-\frac{\beta}{a} = -\frac{4ac-b^2}{4a\times a} = -\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. $4a^2>0$, par conséquent $-\frac{\beta}{a}$ est du signe de b^2-4ac. Ainsi le nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dépends du signe du nombre b^2-4ac.

Définition 3. (Discriminant)

On cherche à résoudre $ax^2+bx+c=0$, on appelle discriminant de cette équation le nombre réel noté Δ, qui vaut :

$$\Delta = b^2-4ac$$

On a vu que : $ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$

1. Si $\Delta<0$, on voit clairement que l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.

2. Si $\Delta=0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ équivant à

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Longleftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

   L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède alors une solution réelle (dite double) $x=-\dfrac{b}{2a}$.

3. Enfin si $\Delta>0$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
\Longleftrightarrow\quad & x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\Longleftrightarrow\quad & x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

   L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède alors deux solutions réelles $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Théorème 1.

1. Si $\Delta<0$: l'équation n'a pas de solution réelle
2. Si $\Delta=0$: l'équation a une solution $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
3. Si $\Delta>0$: l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Remarque :

⇝ Les formules obtenues pour $\Delta>0$ s'étendent à $\Delta\geq 0$

- Si les coefficients a et c sont de signes opposés, alors le trinôme admet deux racines ; en effet, dans ce cas $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $-6x^2 + x + 1 = 0$
3. $5x^2 + 6x + 2 = 0$
4. Répondre au problème initial
5. $x^2 - 2x = 0$
6. $x^2 - 5 = 0$

III. Factorisation du trinôme

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c = a\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{4a} = a\left(\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{4a^2}\right)$, cette expression est factorisable lorsque $\Delta \geq 0$ (pour cela il suffit d'utiliser la troisième identité remarquable :

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Théorème 2.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :

- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

Preuve

- Si $\Delta = 0$: le trinôme s'écrit, à l'aide de la forme canonique : $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ on a $a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$

Remarque : Lorsque $\Delta < 0$, comme le trinôme n'a pas de racine réelle, il faut abandonner l'espoir de pouvoir le factoriser (du moins dans $\mathbb{R}$)

IV. Signe du trinôme

But : Étudier le signe de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x.
Cas 1 - $\Delta > 0$: Soit x_1 et x_2 ses racines, avec $x_1 < x_2$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Établissons le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$		signe de a	0	opposé de a	0	signe de a	

Cas 2 - $\Delta \leqslant 0$: On utilise la forme canonique :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

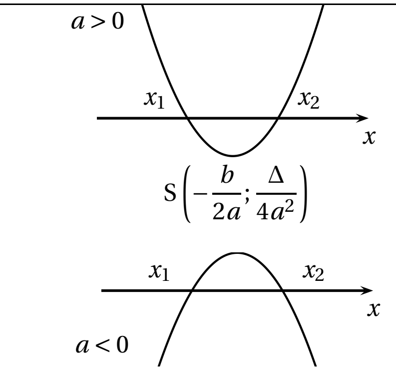
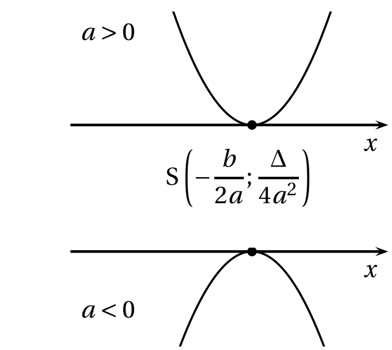
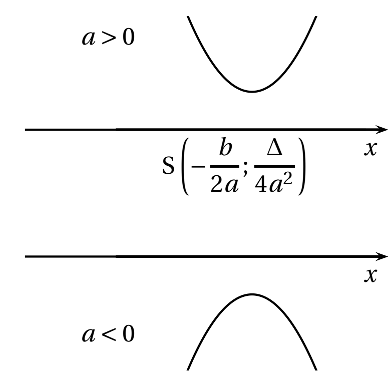
Comme Δ est négatif, l'expression entre crochets est positive, le signe de $\mathrm{P}(x)$ est donc le même que celui de a

Théorème 3.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent. En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant.

Exercice 6. Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

Résumé : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

<table>
<tr><th>Δ</th><th>Factorisation</th><th>Racines</th><th>Signe de $P(x)$</th><th>Parabole</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>Deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $P(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Opposé de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>$a(x-x_0)^2$</td><td>Une racine :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $P(x)$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>pas
de
factorisation</td><td>Aucune
racine
réelle</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $P(x)$</td><td colspan="2">Signe de a</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

V. Fonction polynôme de degré quelconque

Définition 4.

On appelle fonction polynôme (à coefficients réels) de degré n) ($n \in \mathbb{N}$) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ dont l'écriture peut se ramener à la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ où } a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \text{ sont des réels avec } a_n \neq 0$$

Le terme $a_p x^p$ s'appelle monôme de degré p. On note $n = Deg(P)$

Exemples :

- La fonction P définie par : $P(x) = x^8 - 6x^7 + 3x^2 - 5$ est une fonction polynôme de degré 8
- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers : $P(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ sont des fonctions polynômes de degré p.
- Les fonctions affines et constantes (différente de la fonction nulle) sont des fonctions polynômes de degré 1 et 0

Exemples :

- La fonction Q définie par $Q(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$ n'est pas une fonction polynôme
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction polynôme car non définie pour $x = 1$ ou $x = -1$
- En revanche la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme de degré 2 puisque $h(x) = x^2 - 1$

Propriété 2.

Deux polynômes non nuls sont égaux, si et seulement si, ces polynômes ont le même degré et les coefficients de leurs termes de même degré deux à deux égaux

Remarque : Cette propriété est admise

Exemple :

Pour tout réel x, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 7x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ si, et seulement si, $a = 7$, $b = -4$, $c = 2$ et $d = 1$

Définition 5.

On appelle racine d'un polynôme P tout réel λ tel que

$$P(\lambda) = 0$$

Exemple :

Trouver les racines du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x-1)(x^2-x-1)$

Remarque :

- Les fonctions polynôme de degré 1 ($x \longmapsto ax+b$) admettent toutes une seule racine $\lambda = -\dfrac{b}{a}$
- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle, par exemple P avec $P(x) = x^2+1 \geq 1$.

VI. Algorithmie et programmation

Un peu d'histoire

Dans l'antiquité, les mathématiques sont utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions. Elles servent aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figure une (ou plusieurs) quantité inconnue à trouver.
Vers 1800-1500 avant JC, les Babyloniens savent déjà résoudre des équations du 1^{er} et du 2^{nd} degré. On parle de "chose" à trouver et on suit un discours logique phrasé (peu clair pour nous aujourd'hui) pour arriver à une solution.
Ce n'est qu'au VIII^e siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie générale prend place peu à peu. Le point de départ est de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.
Rapidement, on comprend l'intérêt d'une telle méthode. C'est *Al-Khawarizmi* qui le premier s'intéresse à cela et classifie les différents types d'équations, afin que dans chaque problème, on n'ait plus qu'à reconnaitre le type d'équation et suivre la méthode générale appropriée, menant à la solution. Le mot ***algorithme*** découle de son nom et désigne aujourd'hui ***une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique***.
Jusqu'au début du XIX^e, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développent la notation symbolique et la conventionnent : au XVI^e Viete sépare l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utilisé de nos jours. On catégorise les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnues, afin de généraliser le plus possible leur résolution.Parallèlement, la notion de fonction prend forme.
Les équations de degré 3 sont résolues par les italiens Tartaglia et Cardan au XVI^e siècle, et celles de degré 4 par l'élève de ce dernier, Ferrari. L'histoire des formules de résolution s'arrâªte là , car le français Evariste Galois (1811-1832) montre au XIX^e qu'il est impossible de trouver des formules de résolution pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Définition 6.

Un **algorithme** est une suite d'instructions, qui, une fois exécutée correctement, conduit à un unique résultat.

Exemples :

Indiquer un itinéraire allant d'un lieu à un autre, télécharger un ficher, compresser des données, les jeux vidéos, les feux tricolores, les lumières de la tour Eifel, le pilote automatique des avions, la cryptographie ...

En mathématiques, vous connaissez déjà l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver le pgcd de deux nombres entiers positifs.

Les Babyloniens suivaient un algorithme très performant pour trouver une valeur approchée de la racine carré d'un nombre.

Remarques :

- Pour fonctionner, un algorithme doit contenir uniquement des instructions compréhensibles par celui qui devra l'exécuter
- En mathématiques, les algorithmes consistent par exemple en des suites d'opérations à effectuer (pour les fonctions notamment), ou des suites de manipulations à faire (pour construire une figure géométrique).

Exemple : Vocabulaire, démarche et rédaction

On souhaite un algorithme qui donne le type d'extremum d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, sa valeur approchée et quand il est atteint.

1. **Détermination des variables : analyse préliminaire**
   (a) Quelles sont les informations initiales dont nous avons besoin ?
   On les appelle les *entrées* de l'algorithme.
   (b) Quelle condition avons-nous sur l'une de ces entrées ?
   (c) Que doit-on calculer ?
   On prendra l'habitude de faire afficher le(s) résultat(s) de l'algorithme, que l'on appelle *sortie(s)*.
   L'ensemble des données de l'algorithme pouvant variées (entrées-sorties) sont les *variables*.
2. **Rédaction du processus français : l'algorithme**
   On commence toujours un algorithme en énonçant les variables mises en jeu (désignées par des lettres), et en précisant leur nature (nombre, mot ...)
   Saisir une donnée permet à l'utilisateur d'attribuer une valeur à une variable (ce sont les entrées).
   Lorsque la donnée remplie par l'utilisateur ne remplit pas l'une des conditions initiales, il faut lui redemander. On utilisera la boucle « *Tant que* » pour le faire jusqu'à ce que la donnée satisfasse toutes les conditions nécessaires.
   Affecter à une donnée une certaine valeur permet d'attribuer une valeur à une variable.
   Afficher permet à l'utilisateur de voir un texte entre guillemets ou la valeur d'une variable à l'écran.
   La boucle *Si* sert à différencier des cas.
   Compléter l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : *Extremum d'un trinôme*

Données: ...., ..., ..., ..., ... sont des nombres réels Saisir ....
Tant que (.........) **Faire**
  Afficher "Erreur : ...."
  Saisir ....
Fin Tant que
Saisir .... et ....
Affecter à .... la valeur .....
Affecter à .... la valeur .....
Si (........) **Alors**
  Afficher "La fonction f admet pour .... "
Sinon
  Afficher "La fonction f admet pour .... "
Fin Si
Afficher ...... " atteint en " ......

3. **La programmation : sur Algobox et sur TI**
   Trouver comment programmer cet algorithme sur Algobox et sur votre calculatrice (ie avec le vocabulaire adapté au support) .

Exercice 7. Ecrire un algorithme qui donne la valeur du Δ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, ainsi que son nombre de racines éventuelles et leurs valeurs.
Le programmer sur votre calculatrice.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien