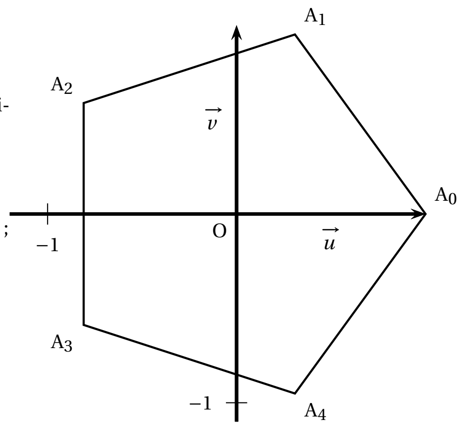
BAC ROUGE

Exercice 1. **3 points**

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.
On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k}\ ;\ \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{i}{2}$.
   Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un point K.
   Calculer BJ, puis en déduire BK.

$$BJ = |z_J - z_B| = \left|\frac{i}{2} - (-1)\right| = \left|1 + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

De plus BK = BJ − KJ, or KJ est un rayon du cercle $\mathscr{C}$ par conséquent $KJ = \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$BK = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

2. (a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.
   D'après la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2}\right) = \left(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_1};\overrightarrow{OA_2}\right)$
   et d'après l'énoncé :
   $$\left(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$
   Ainsi un argument de z_{A_2} est $\dfrac{4\pi}{5}$
   De plus le point A_2 appartient au cercle trigonométrique donc $OA_2 = 1$ donc $\left|z_{A_2}\right| = 1$
   On en déduit, en somme, que :
   $$z_{A_2} = 1 \times e^{i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

   (b) Démontrer que ${BA_2}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
   Notons C le projeté orthogonal de A_2 sur l'axe des abscisses (cf. figure ci-dessous), appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle BCA_2 qui est rectangle en A_2 :
   $$BA_2^2 = BC^2 + CA_2^2$$
   CA_2 est égal à l'ordonnée de A_2, et puisque $z_{A_2} = e^{i\frac{4\pi}{5}} = \cos\dfrac{4\pi}{5} + i\sin\dfrac{4\pi}{5}$, il suit que $CA_2 = \sin\dfrac{4\pi}{5}$
   De plus $BC = OB - OC = 1 - OC$, donc $BC^2 = (1-OC)^2 = 1 - 2OC + OC^2$.
   Enfin $OC = -\cos\dfrac{4\pi}{5}$, en effet OC est une longueur et l'abscisse de A_2 qui vaut $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ est négative, ce pourquoi $OC = -\cos\dfrac{4\pi}{5}$,
   Concluons alors, en utilisant le fait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x :

$$BA_2^2 = BC^2 + CA_2^2 = 1 - 2\left(-\cos\frac{4\pi}{5}\right) + \left(-\cos\frac{4\pi}{5}\right)^2 = 1 + \cos^2\frac{4\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 1 + 1 + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 2 + 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

(c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\rightarrow \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2) $\rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

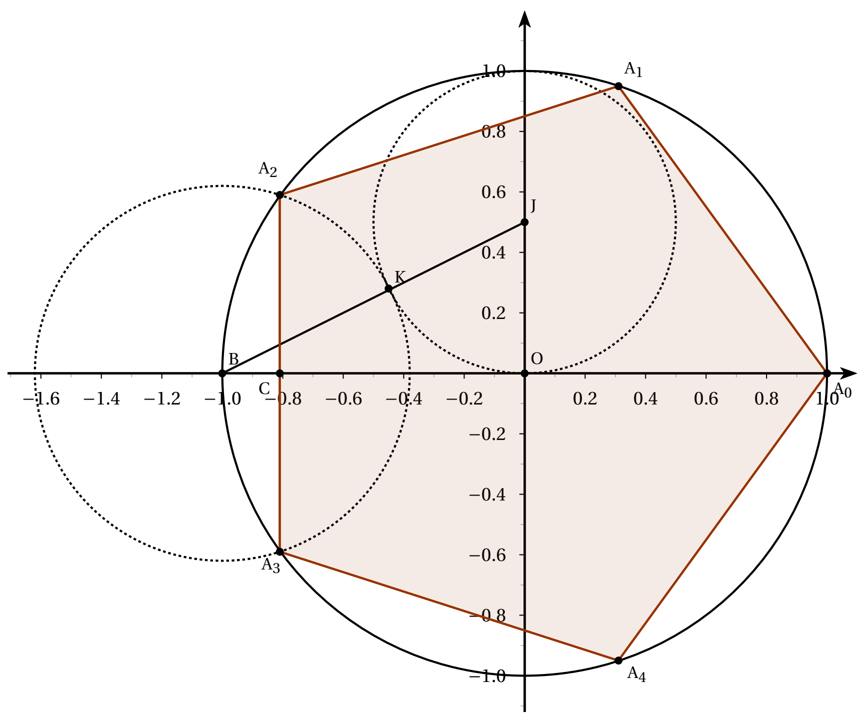
En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

Nous savons que $BA_2^2 = 2 + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 2 + 2\times\left(\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)\right) = 2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{4-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

D'après la première question $BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, par conséquent $BK^2 = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4} = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent $BK^2 = BA_2^2$ et donc $BK = BA_2$.

3. Dans le repère $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.



Exercice 2. **5 points**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5\,;\,-5\,;\,2), B(-1\,;\,1\,;\,0), C(0\,;\,1\,;\,2) \quad \text{et } D(6\,;\,6\,;\,-1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

$\overrightarrow{BC}(1;0;2)$, $\overrightarrow{BD}(7;5;-1)$ puis $\overrightarrow{CD}(6;5;-3)$. On a :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = 1\times 6 + 0\times 5 + 2\times(-3) = 6-6 = 0$$

Par conséquent (BC) $\perp$ (CD), donc le triangle BCD est rectangle en C.
Vérifions si celui-ci est isocèle en C :

$$BC = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad CD = \sqrt{36+25+9} = \sqrt{70}$$

BC $\neq$ CD donc le triangle BCD n'est pas isocèle en C.
On en déduit que l'aire du triangle BCD vaut :

$$\frac{BC\times CD}{2} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2} = \frac{\sqrt{5\times5\times2\times7}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}$$

2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Pour démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) il faut démontrer que $\vec{n}$ est normal à deux vecteurs non colinéaires qui dirige le plan (BCD).
Vérifions le :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = -2\times 1 + 3\times 0 + 1\times 2 = -2+2 = 0$$

Par conséquent $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}$, vérifions que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux aussi :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = -2\times 6 + 3\times 5 + 1\times(-3) = -12+15-3 = 0$$

Par conséquent $\vec{n}\perp\overrightarrow{CD}$.
$\vec{n}$ est orthogonal avec deux vecteurs directeurs non colinéaires de (BCD), on en déduit que $\vec{n}$ est normal au plan (BCD).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

$$M(x;y;z)\in(BCD) \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM}\perp\vec{n} \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = 0$$

L'équation du plan (BCD) est donc :

$$-2(x-(-1)) + 3(y-1) + (z-0) = 0 \Longleftrightarrow -2(x+1)+3y-3+z = 0 \Longleftrightarrow -2x+3y+z = 5$$

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

Puisque $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (BCD) alors tout vecteur normal au plan (BCD) est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$, en particulier $\vec{n}$ dirige $\mathscr{D}$.
Nous obtenons alors :

$$M(x;y;z)\in\mathscr{D} \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{n}$$

Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est alors :

$$\begin{cases} x-5= & -2t \\ y+5= & 3t \\ z-2= & t \end{cases} t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x= & -2t+5 \\ y= & 3t-5 \\ z= & t+2 \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

Les coordonnées du point H satisfont la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ puisque $\mathrm{H}\in\mathcal{D}$, par conséquent il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{H}}= & -2t+5 \\ y_{\mathrm{H}}= & 3t-5 \\ z_{\mathrm{H}}= & t+2 \end{cases}$$

De plus du fait que $\mathrm{H}\in(\mathrm{BCD})$ ses coordonnées satisfont l'équation du plan (BCD) et donc

$$-2x_{\mathrm{H}}+3y_{\mathrm{H}}+z_{\mathrm{H}}=5$$

Nous en déduisons par substitution que :

$$-2(-2t+5)+3(3t-5)+t+2=5 \iff 4t-10+9t-15+t=3 \iff 14t=28 \iff t=2$$

Et donc $x_{\mathrm{H}}=-2\times2+5=1$, $y_{\mathrm{H}}=3\times2-5=1$, $z_{\mathrm{H}}=2+2=4$, autrement dit :

$$\mathrm{H}(1;1;4)$$

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.

Nous savons, en particulier car l'énoncé le rappelle, que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h$, où $\mathcal{B}$

Si nous prenons pour base BCD, alors la hauteur issue de A relative à cette base est la droite (AH), nous obtenons alors (en utilisant le résultat de la question 1.) :

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times5\frac{\sqrt{14}}{2}\times\mathrm{AH}=\frac{5\sqrt{14}}{6}\mathrm{AH}$$

Or, $\mathrm{AH}=\sqrt{(5-1)^2+(-5-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}=\sqrt{4\times14}=2\sqrt{14}$

Le volume du tétraèdre ABCD vaut alors :

$$\mathcal{V}=\frac{5\sqrt{14}}{6}\times2\sqrt{14}=\frac{5\times14}{3}=\frac{70}{3}$$

6. On admet que $\mathrm{AB}=\sqrt{76}$ et $\mathrm{AC}=\sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-6;6;-2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-5;6;0)$

Nous obtenons $\mathrm{AB}=\sqrt{36+36+4}=\sqrt{76}$ comme admis dans l'énoncé et $\mathrm{AC}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$ comme admis dans l'énoncé.

De plus :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=30+36=66$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\iff\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})=\frac{66}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}}$$

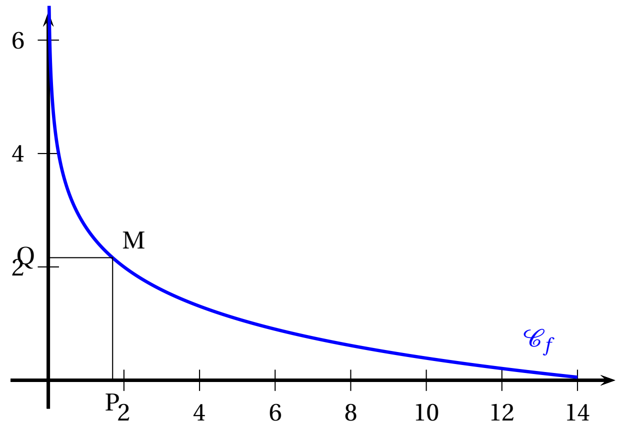
La calculatrice permet alors de conclure.

Exercice 3. **3 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

Si $x_M = 2$ alors l'aire du rectangle OPMQ vaut $2 \times f(2) = 2 \times (2 - \ln(1)) = 2 \times 2 = 4$
Si $x_M = 2e$ alors l'aire du rectangle OPMQ vaut $2ef(2e) = 2e \times (2 - \ln e) = 2e \times 1 = 2e$
Puisque $2e \neq 4$ alors l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante et dépend de la position du point M sur $\mathscr{C}_{\{}$ ce qui réponds à la première question.
Soit x l'abscisse du point M, alors l'aire du rectangle OPMQ, que nous notons $\mathscr{A}(x)$ vaut :

$$\mathscr{A}(x) = x \times f(x) = x\left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2x - x\ln\frac{x}{2}$$

Etudions cette fonction, qui admet pour dérivé la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\mathscr{A}'(x) = 2 - \left((x)'\ln\frac{x}{2} + x\frac{(0.5x)'}{0,5x}\right) = 2 - \ln\frac{x}{2} - \frac{0,5x}{0,5x} = 1 - \ln\frac{x}{2}$$

De plus

$$1 - \ln\frac{x}{2} \leq 0 \Longleftrightarrow 1 \leq \ln\frac{x}{2} \Longleftrightarrow e \leq \frac{x}{2} \Longleftrightarrow 2e \leq x$$

ce qui permet de dresser le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		$2e$		$+\infty$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$		$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	

L'aire du rectangle OPMQ est donc maximale lorsque $x_M = 2e$ et le point M correspondant à pour coordonnées $M(2e;1)$ puisque $f(2e) = 1$ ce qui achève de répondre à l'exercice.

Exercice 4. **4 points**

Le test de dépistage d'une maladie possède les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;

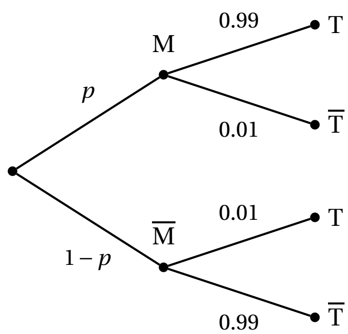
— la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif est 0,99.

On note p la proportion de malade dans la population puis on note :

- T l'événement : « le test est positif »
- M l'événement : « l'individu est malade »

On croise au hasard un individu ayant effectué le dépistage.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilité.



2. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.

Cette probabilité vaut :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,99p + (1-p)0,01 = 0,99p + 0,01 - 0,01p = 0,98p + 0,01$$

3. (a) Exprimer en fonction de p la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade.

Cette probabilité vaut :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,99p}{0,98p + 0,01} = \frac{99p}{98p+1}$$

(b) Quelle doit être la proportion p de malades pour que la probabilité précédente (i.e. la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade) soit supérieure à $0,90$?

On cherche p tel que

$$P_T(M) \geq 0,90 \iff \frac{99p}{98p+1} \geq 0,90 \iff 99p \geq 0,90(98p+1) \iff 99p \geq 88,2p + 0,90 \iff 10,8p \geq 0,9 \iff p \geq \frac{0,9}{10,8} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12}$$

Dès qu'il y a plus d'un malade sur douze dans la population la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif est supérieur à $0,90$.

4. (a) Déterminer, en fonction de p, la probabilité qu'un individu, dont le test est négatif, soit malade.

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0.01p}{0.01p + 0.99 \times (1-p)} = \frac{0.01p}{0.99 - 0.98p} = \frac{p}{99 - 98p}$$

(b) Quelle doit être la proportion p de malades pour que la probabilité précédente soit inférieure à $0,1$?

$$\frac{p}{99-98p} \leq 0,1 \iff p \leq (99 - 98p) \times 0,1 \iff p \leq 9.9 - 9.8p \iff p + 9.8p \leq 9.9 \iff 10.8p \leq 9.9 \iff p \leq \frac{99}{108} = \frac{11}{12}$$

Dès qu'il y a moins de 11 malades sur douze dans la population la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est négatif est inférieure à $0,1$.

5. Le test de dépistage d'une maladie est acceptable si et seulement si la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade est supérieure à $0,90$ et la probabilité qu'un individu, dont le test est négatif, soit malade est inférieure à $0,1$. Dans ce cas pour quelle proportion p de malades le test est-il acceptable ?

Le test de dépistage est acceptable si et seulement si $\frac{1}{12} \leq p \leq \frac{11}{12}$ d'après les questions précédentes.

Exercice 5. **5 points**

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$ °C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ °C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A. **Modélisation discrète**

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
Arrondir à l'unité.

$$T_1 = 0,85T_0 + 15 = 0,85 \times 25 + 15 = 21.25 + 15 = 36,25$$

$$T_2 = 0,85T_1 + 15 = 0,85 \times 36,25 + 15 = 45,8125$$

$$T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 0,85 \times 45,8125 + 15 = 53.940625$$

Au bout de 3 minutes la température de la boîte de conserve est d'environ 54 degré.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

Notons $\mathscr{P}(n) : T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ et démontrons cette propriété par récurrence.

— ***Initialisation*** : pour $n = 0$ il se trouve que $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$, ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ alors $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0,85^{n+1}$
D'après l'algorithme $T_{n+1} = 0,85T_n + 15$, puisque nous supposons que $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$, il suit que :

$$T_{n+1} = 0,85\left(100 - 75 \times 0,85^n\right) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{n+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{n+1}$$

La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire, en plus d'être initialisée, nous en déduisons donc par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$$

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

La stérilisation débute dès que $T_n \geq 85$ ce qui équivaut à :

$$100-75\times 0,85^n \geq 85 \Longleftrightarrow 15 \geq 75\times 0,85^n \Longleftrightarrow \frac{15}{75} \geq 0,85^n \Longleftrightarrow 0,85^n \leq \frac{1}{5} \Longleftrightarrow \ln\left(0,85^n\right) \leq \ln\frac{1}{5} \Longleftrightarrow n\ln 0,85 \leq \ln 0,2 \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln 0,85} \simeq 9,$$

La stérilisation début au bout d'environ 10 minutes.

PARTIE B. **Modélisation continue**

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. (a) Étudier le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et :

$$f'(t) = -75\times\left(-\frac{\ln 5}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5\ln 5\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$$

Puisque $e^x > 0$ pour tout réel x, il suit que pour $t \geq 0$ on a $\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$. Et puisque $7,5\ln 5 > 0$ on a pour tout $t \geq 0$:

$$f'(t) > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

(b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

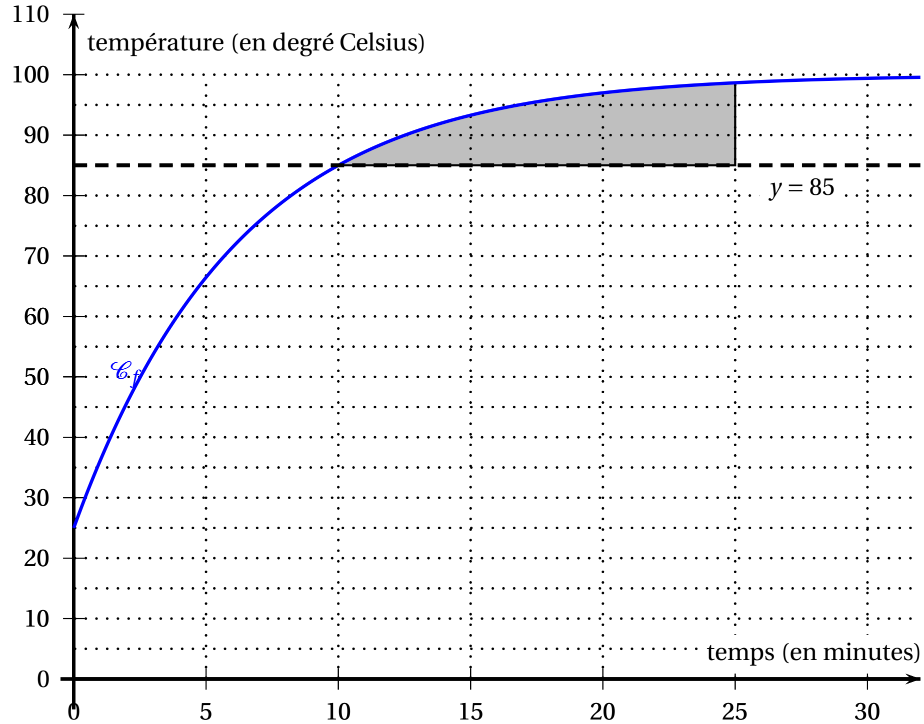
Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors : $t \geqslant 10 \Longrightarrow f(t) \geqslant f(10) = 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.

(a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.



A(25) est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3,5\times 25 = 87,5$ unités d'aire. Donc $\mathscr{A}(25) > 80$.

(b) Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta-10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta}\big(f(t)-85\big)\,dt = \int_{10}^{\theta}\left[\left(100-75\times\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)-85\right]dt = \int_{10}^{\theta}\left(15-75\times\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)dt\\ &= \int_{10}^{\theta}15dt - \int_{10}^{\theta}75\times\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}dt = 15\left[t\right]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}dt = 15(\theta-10) - 75\int_{10}^{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}dt\end{aligned}$$

(c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

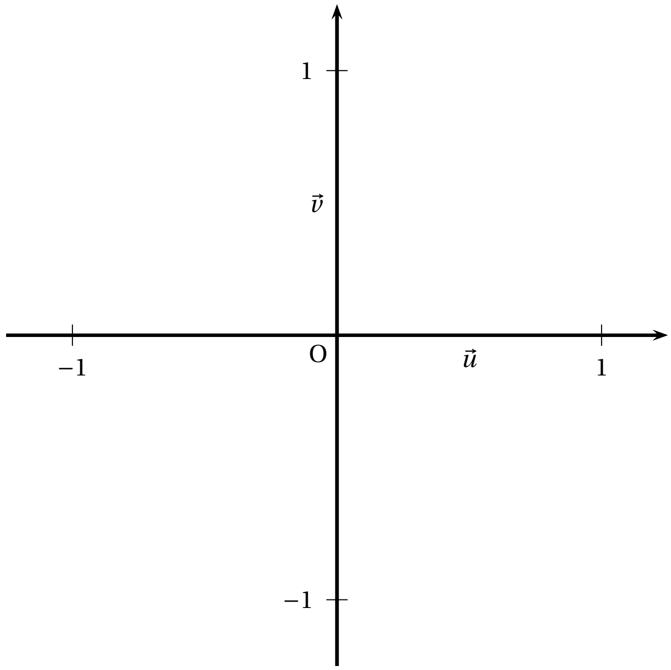
$$\begin{aligned}\mathscr{A}(20) &= 15(20-10) - 75\int_{10}^{20}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}dt = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20} = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]\\ &= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right]\end{aligned}$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5} \times \frac{-4}{25} = 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.

Nom : .... **Prénom** : .... **Classe** : ....

Annexe (complexe) : Construction du pentagone régulier à la règle non graduée et au compas



Annexe (fonctions) : Une aire.