La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. En particulier dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. **(10 points)**

PARTIE A. **Etude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Immédiatement par addition :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   De plus pour $x \neq 0$: $g(x) = x^3\left(4 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3}\right)$

   Puisque $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ il suit que

$$\lim_{x\to-\infty} 4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} = 4$$

   Enfin comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ nous concluons par multiplication que :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$g'(x) = 12x^2 + 6x$$

   Or, $12x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow 6x(2x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad$ ou $\quad x = -\dfrac{1}{2}$.

   La connaissance des racines du trinôme g' nous permet de dresser son tableau de signe et du même coup le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2,25$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que nous noterons α puis déterminer α à 10^{-2} près.

   Tout d'abord sur pour $x \geq -\dfrac{1}{2}$ nous déduisons du tableau de variation de g que $g(x) \geq 2 > 0$, ainsi l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

   Puis la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (g étant un polynôme), elle est strictement croissante sur $]-\infty;-0,5]$ et $0 \in]-\infty;2,25]$ donc d'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty;-0,5]$ et une unique solution sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle n'en admet pas sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$).

   Il semblerait à la lecture de vos copies que $\alpha \simeq -1,13$ ou plus précisément que :

$$-1,14 < \alpha < -1,13$$

4. En déduire le tableau de signe de $g(x)$.

Des variations de g et du fait que $g(\alpha) = 0$ on déduit immédiatement que :

x	$-\infty$		α		$-0,5$		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$2,25$	↘	2	↗	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0			$+$			

PARTIE B.

On considère la fonction f définie pour $x \neq -\frac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{3-3x^3}{2x+1}$$

Dans un repère orthonormal, on note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Que ce soit en $\pm\infty$ écrite sous cette forme nous ne pouvons pas conclure quant aux limites de f.

Alors on factorise par les termes de plus haut degré pour trouver que pour $|x| > \frac{1}{2}$ (autrement dit pour x grand en valeurs absolues) on a :

$$f(x) = x^2 \frac{\frac{3}{x^3} - 3}{2 + \frac{1}{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x^3}-3}{2+\frac{1}{x}} = -\frac{3}{2}$

On obtient par multiplication :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$$

(b) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} 3-3x^3 = 3+3/8 > 0$

De plus $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} 2x+1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} = 0^-$

Ainsi par division on obtient :

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

Ces deux derniers résultats prouvent que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$ on a :

$$f'(x) = \frac{-3g(x)}{(2x+1)^2}$$

f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition. Par conséquent on a pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{(3-3x^3)'(2x+1)-(3-3x^3)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{-9x^2(2x+1)-2(3-3x^3)}{(2x+1)^2} = \frac{-18x^3-9x^2-6+6x^3}{(2x+1)^2} = \frac{-3g(x)}{(2x+1)^2}$$

(b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Pour ce faire analysons le signe de f' en fonction des valeurs de x.

x	$-\infty$		α		$-0,5$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0		$+$		
$-3g(x)$		$+$	0			$-$	
$(2x+1)^2$			$+$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$-\infty$

3. (a) On note A(0;3). Déterminer l'équation T de la tangente de $\mathscr{C}_f$ en A.

T : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. De plus puisque $f(0) = 3$ et $f'(0) = -6$ on obtient :

$$\text{T} : y = -6x + 3$$

(b) Démontrer que pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$ on a :

$$f(x) - (-6x+3) = \frac{3x^2(4-x)}{2x+1}$$

Pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$ on a :

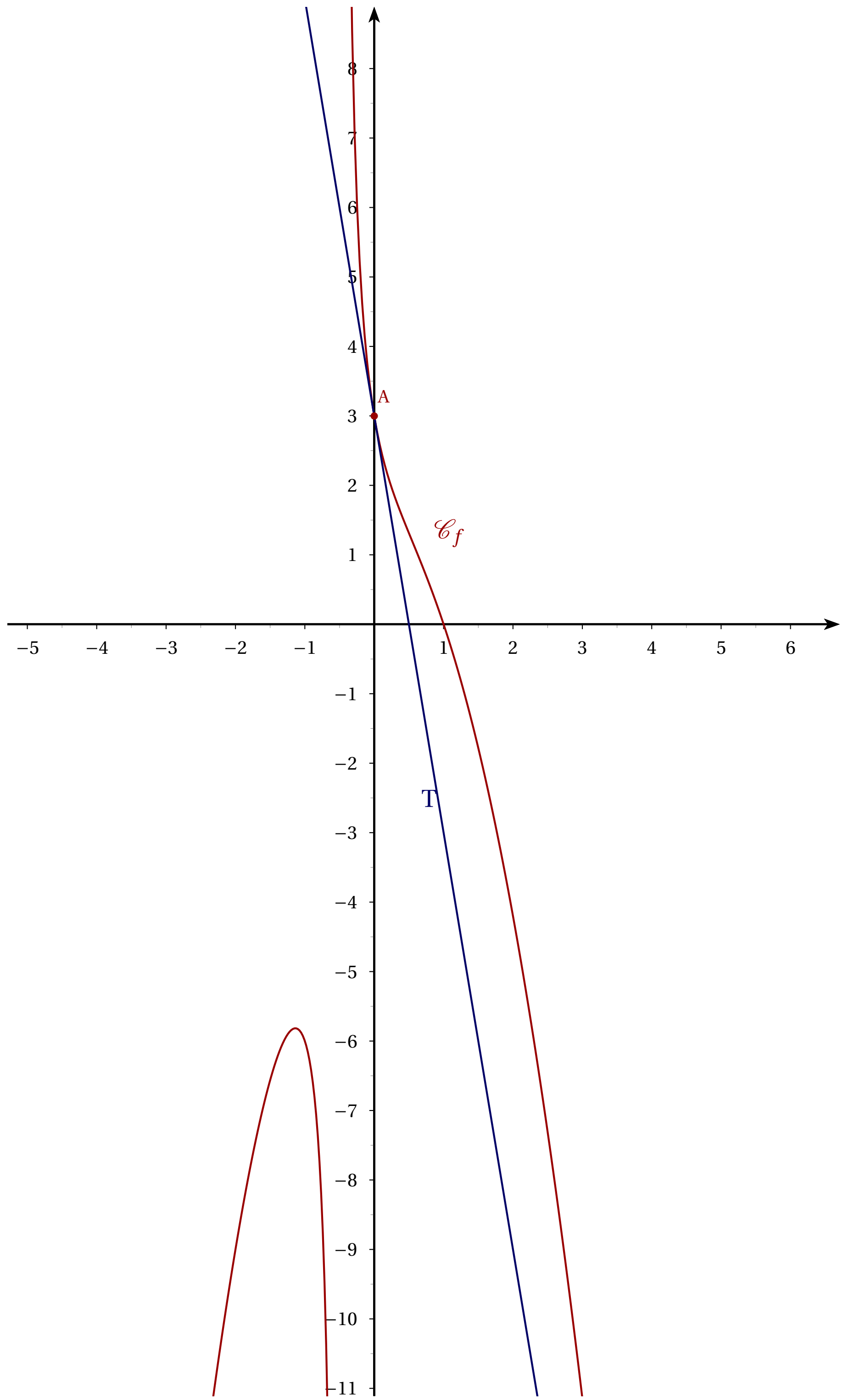
$$f(x) - (-6x+3) = f(x) + 6x - 3 = \frac{3 - 3x^3 + (6x-3)(2x+1)}{2x+1} = \frac{3 - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 6x - 3}{2x+1} = \frac{3x^2(4-x)}{2x+1}$$

(c) En déduire que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{1}{2};4\right]$.

Analysons le signe de $f(x) - (-6x+3)$ en fonction des valeurs de x, i.e analysons le signe de $\dfrac{3x^2(4-x)}{2x+1}$.

x	$-\infty$		$-0,5$		0		4		$+\infty$
$3x^2$			$+$		0		$+$		
$4-x$				$+$			0	$-$	
$2x+1$		$-$	0			$+$			
$f(x)-(-6x+3)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	0	$-$	

ce qui achève de démontrer que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{1}{2};4\right]$ puisque $f(x) - (-6x+3) \geq 0$ si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{1}{2};4\right]$.


A
$\mathscr{C}_f$
T
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11