La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. En particulier dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. **(10 points)**

On considère le cube ABCDEFGH de côté 4 dans le repère orthonormal $(A; 1/4\overrightarrow{AB}; 1/4\overrightarrow{AD}; 1/4\overrightarrow{AE})$. Ainsi les sommets du cube ont pour coordonnées :

$A(0;0;0)$ $B(4;0;0)$ $C(4;4;0)$ $D(0;4;0)$ $E(0;0;4)$ $F(4;0;4)$ $G(4;4;4)$ $H(0;4;4)$

Enfin I est le milieu du segment [AB], J est tel que $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CG}$ et K est tel que $\overrightarrow{EK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EH}$

L'objectif de cet exercice est de tracer la section du cube par le plan (IJK)

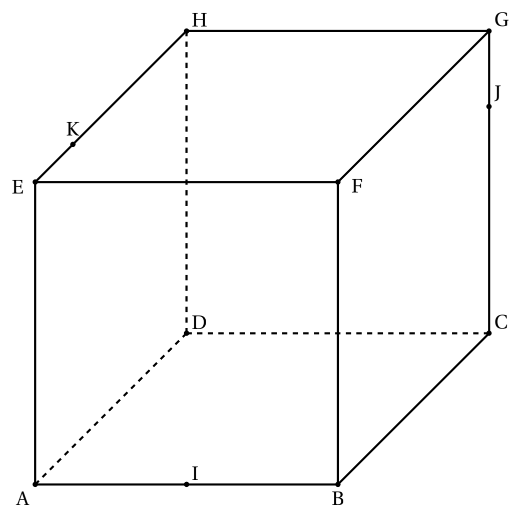
PARTIE A. (IJK) **est bien un plan !**

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

I étant le milieu du segment [AB] ses coordonnées sont :

$$I\left(\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+0}{2}\right) \Longleftrightarrow I(2;0;0)$$

Observons la figure afin d'utiliser la relation de Chasles :



$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$$

C'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AK} = 0 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + 4 \times 1/4\overrightarrow{AE} \Longleftrightarrow K(0;1;4)$$

De même en utilisant Chasles on trouve que $J(4;4;3)$.

2. Justifier que les points I, J et K définissent bien un plan.

I, J et K définissent bien un plan si et seulement si I, J et K ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{IJ}(4-2;4-0;3-0) \Longleftrightarrow \overrightarrow{IJ}(2;4;3)$

et $\overrightarrow{IK}(0-2;1-0;4-0) \Longleftrightarrow \overrightarrow{IK}(-2;1;4)$

Les coordonnées de ses deux vecteurs n'étant pas proportionnelles, il suit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points I, J et K ne sont pas alignés. (IJK) est bien un plan.

PARTIE B. **Recherche d'un point du plan (IJK) sur l'arête [HG].**

1. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

$\mathrm{I}(2;0;0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\,(2;4;3)$

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{IJ}) \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{IM}} = t\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$$

Ainsi une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2=2t \\ y=4t \\ z=3t \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2t+2 \\ y=4t \\ z=3t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

(b) Vérifier qu'une représentation paramétrique du plan (EFG) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=4t \\ y=4t' \\ z=4 \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad t'\in\mathbb{R}$$

Vérifions que les points E, F et G (qui ne sont trivialement pas alignés) ont des coordonnées satisfaisant la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé.
Pour $\mathrm{E}(0;0;4)$:
$x=4t$ donne $0=4t$ et donc $t=0$.
$y=4t'$ donne $0=4t'$ et donc $t'=0$ et enfin $z_{\mathrm{E}}=4$ ce qui valide la troisième équation.
Les coordonnées de E sont donc obtenues pour $t=t'=0$.
Pour $\mathrm{F}(4;0;4)$:
$x=4t$ donne $4=4t$ et donc $t=1$.
$y=4t'$ donne $0=4t'$ et donc $t'=0$ et puisque $z_{\mathrm{F}}=4$ la troisième équation est vérifiée aussi.
Les coordonnées de F sont donc obtenues pour $t=t'=0$.
Enfin on obtient les coordonnées de G en remplaçant t et t' par 1.
Nous venons de démontrer que les point E, F et G appartient tous trois à la représentation paramétrique de plan donnée dans l'énoncé ce qui prouve que cette représentation paramétrique est celle du plan (EFG).
Autre méthode : Tout plan est dirigée par deux vecteurs non colinéaires, en particulier le plan (EFG) est dirigée par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}(4;0;0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{EH}}(0;4;0)$.
Par conséquent $\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{EFG}) \Longleftrightarrow \exists t,t'\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{EM}} = t\overrightarrow{\mathrm{EF}} + t'\overrightarrow{\mathrm{EH}}$
Et donc une représentation paramétrique du plan (EFG) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=4t \\ y=4t' \\ z=4 \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad t'\in\mathbb{R}$$

(c) En déduire que le point d'intersection L entre la droite (IJ) et le plan (EFG) a pour coordonnées $\mathrm{L}\left(\frac{14}{3};\frac{16}{3};4\right)$

Il existe au moins deux méthodes pour répondre à cette question :

— **Première stratégie** : On utilise la réponse donnée dans la question et on vérifie que les coordonnées du point L satisfont les représentations paramétriques de (IJ) et de (EFG). On s'assure ensuite que (IJ) n'est pas contenue dans le plan (EFG) (en démontrant par exemple que les coordonnées de I ne satisfont pas la représentation paramétrique de (EFG)).

— **Deuxième stratégie** : On procède comme si la réponse n'était pas donnée dans l'énoncé et on cherche à la retrouver en cherchant les points dont les coordonnées satisfont simultanément les deux représentations paramétriques.

Puisque la seconde stratégie conduira à la solution dans tous cas, nous allons procéder ainsi en cherchant donc à résoudre le système a trois inconnues suivants :

$$\begin{cases} 4t = 2u+2 \\ 4t' = 4u \Longrightarrow t' = u = \dfrac{4}{3} \\ 4 = 3u \Longrightarrow u = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4t = 2\times(4/3)+2 = 14/3 \Longrightarrow t = \dfrac{7}{6} \\ t' = \dfrac{4}{3} \\ u = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Ce dernier système admet donc un unique triplet solution $t = \dfrac{7}{6}$, $t' = \dfrac{4}{3}$ et $u = \dfrac{4}{3}$, par conséquent la droite (IJ) et le plan (EFG) ont un unique point d'intersection L dont les coordonnées sont obtenues pour $t = \dfrac{7}{6}$ et $t' = \dfrac{4}{3}$ dans la représentation paramétrique de (EFG) ou pour $u = \dfrac{4}{3}$ dans la représentation paramétrique de (IJ).
Utilisons la représentation paramétrique de (IJ) pour en déduire les coordonnées de L :

$$\begin{cases} x = 2u+2 = 2\times 4/3+2 = \dfrac{14}{3} \\ y = 4u = 4\times\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3} \\ z = 3u = \dfrac{3\times 4}{3} = 4 \end{cases}$$

On retrouve bien :

$$\mathrm{L}\left(\frac{14}{3};\frac{16}{3};4\right)$$

2. Démontrer que les représentations paramétrique des droites (KL) et (HG) sont :

$$(\mathrm{KL}) : \begin{cases} x = \dfrac{14}{3}t \\ y = \dfrac{13}{3}t+1 \\ z = 4 \end{cases}, t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{HG}) : \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$$

Du fait que $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(\dfrac{14}{3}-0;\dfrac{16}{3}-1;4-4\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3};0\right)$ on a

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{KL}) \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{KM}} = t\overrightarrow{\mathrm{KL}} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3}t \\ y = \dfrac{13}{3}t+1 \\ z = 4 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

De même puisque $\overrightarrow{\mathrm{HG}}(4;0;0)$ on obtient :

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{HG}) \Longleftrightarrow \exists t'\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{HM}} = t\overrightarrow{\mathrm{HG}} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$$

3. Expliquer pourquoi les droites (KL) et (HG) sont sécantes.

$\overrightarrow{HG}(4;0;0)$ et $\overrightarrow{KL}\left(\frac{14}{3};\frac{13}{3};0\right)$ ont des coordonnées non proportionnelles, par conséquent les droites (HG) et (KL) ne sont pas parallèles.

Elles sont donc soit sécantes soit **non coplanaires**.

Et elles ne risque pas d'être non coplanaires puisque les points H, G, K et L sont tous 4 des points du plan (EFG).

Par conséquent elles ne peuvent être que sécantes.

4. En déduire que leur point d'intersection P a pour coordonnées $P\left(\frac{42}{13};4;4\right)$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{14}{3}t = 4t' \\ \frac{13}{3}t + 1 = 4 \\ 4 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{14}{3}t = 4t' \Longrightarrow \frac{14}{3} \times \frac{9}{13} = 4t' \Longrightarrow \frac{42}{13} = 4t' \Longrightarrow t' = \frac{21}{26} \\ \frac{13}{3}t = 3 \Longrightarrow t = \frac{9}{13} \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Le point P est donc obtenue pour $t' = \frac{21}{26}$ dans la représentation paramétrique de (KL) et pour $t = \frac{9}{13}$ dans celle de (HG).

Utilisons celle de (HG) pour en déduire ses coordonnées :

$$\begin{cases} x = 4t' = 4 \times \frac{21}{26} = \frac{42}{13} \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

On retrouve bien $P\left(\frac{42}{13};4;4\right)$

PARTIE C. **Où l'on termine la section**

1. Placer le point P sur la figure donnée en annexe 1. Quel tracé doit-on effectuer pour obtenir le point Q d'intersection entre le plan (IJK) et la droite (BC).

Les plans (EFG) et (ABC) étant parallèles, puisque le plan (IJK) coupe le plan (EFG) en (KP) il coupe le plan (ABC) en une droite Δ parallèle à (KP) passant par I.

2. (a) Déterminer une équation paramétrique de la droite Δ passant par I et parallèle à (KL).

(KL)//Δ donc $\overrightarrow{KL}\left(\frac{14}{3};\frac{13}{3};0\right)$ dirige Δ qui passe par $I(2;0;0)$ d'où :

$$\begin{cases} x = \frac{14}{3}t + 2 \\ y = \frac{13}{3}t \\ z = 0 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) En déduire que le point Q a pour coordonnées :

$$Q\left(4;\frac{13}{7};0\right)$$

Placer alors le point Q.

$Q = (BC) \cap \Delta$. Il nous faut connaitre la représentation paramétrique de (BC) que voici :

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4t' + 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad t' \in \mathbb{R}$$

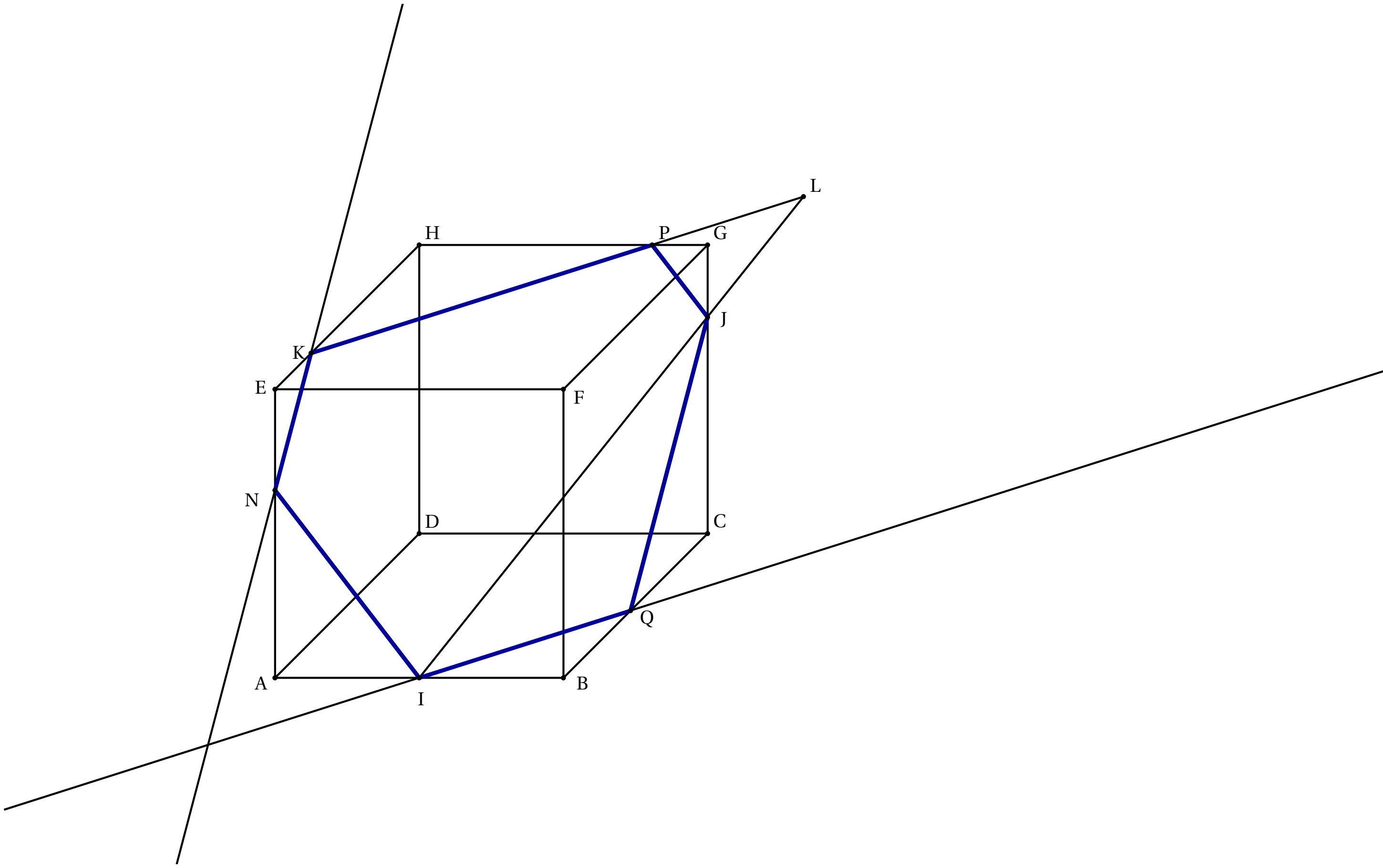
On résout alors :

$$\begin{cases} \dfrac{14}{3}t+2=4 \Longrightarrow t=\dfrac{3}{7} \\ \dfrac{13}{3}t=4t' \Longrightarrow t'=\dfrac{\frac{13}{3}\times\dfrac{3}{7}}{4} \\ 0=0 \end{cases}$$

Le point Q obtenue dans Δ pour $t=\dfrac{3}{7}$ admet donc pour coordonnées :

$$Q\,(4;13/3\times 3/7;0) \Longleftrightarrow Q\left(4;\frac{13}{7};0\right)$$

3. Terminer la construction de la section.



Exercice 2. **(10 points)**

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
Fin pour
Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Remplissons un tableau donnant l'évolution des variables :

N	3			
u	0	$3\times 0-2\times 0+3=3$	$3\times 3-2\times 1+3=10$	$3\times 10-2\times 2+3=29$
k	0	1	2	3

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = 3u_0 - 2\times 0+3 = 3\times 0 - 0 + 3 = 3$$

$$u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 3\times 3 - 2 + 3 = 10$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n \geqslant n$.
Initialisation : pour $n = 0$:
$u_0 = 0$ et on a bien $u_0 \geq 0$
$\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que si $u_n \geqslant n$ alors $u_{n+1} \geqslant n+1$.

$$u_n \geq n \Longleftrightarrow 3u_n \geq 3n \Longleftrightarrow 3u_n - 2n \geq 3n - 2n \Longleftrightarrow 3u_n - 2n + 3 \geq n+3$$

De plus puisque $n+3 > n+1$ on obtient :

$$3u_n - 2n + 3 \geq n+1 \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq n+1$$

Nous venons de démontrer que $\mathscr{P}$ est héréditaire.
Conclusion : $\mathscr{P}$ est héréditaire et vraie à partir de $n = 0$ il suit que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \geq n$$

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, alors puisque $u_n \geq n$ il suit par comparaison que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2(u_n - n) + 3$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$$

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

D'après une question précédente $u_n \geq n$ donc $u_n - n \geq 0$ donc $2(u_n - n) \geq 0$ et donc $2(u_n - n) + 3 \geq 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = u_{n+1} - n - 1 + 1 = u_{n+1} - n = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$$

Puisque $v_{n+1} = 2v_n$, (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Puisque $v_n = u_n - n + 1$ il suit que $v_n + n - 1 = u_n$.

Puisque (v_n) est géométrique de raison 3 il suit que pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$ et donc :

$$3^n + n - 1 = u_n$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Pourquoi est-on sûr qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \text{on ait} \qquad u_n \geqslant 10^p \quad ?$$

Puisque d'après une question de début d'exercice $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors quelque soit le réel A (en particulier pour $A = 10^p$ il existe un rang n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq A = 10^p$.

(b) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $u_n \geqslant 10^3$.

$u_6 = 3^6 + 6 - 1 = 3^6 + 5 = 9 \times 9 \times 9 + 5 = 81 \times 9 + 5 = 810 - 81 + 5 = 810 - 100 + 19 + 5 = 710 + 24 = 734 < 1000$.

puis $u_7 = 3^7 + 7 - 1 = 729 \times 3 + 6 = 2190 - 3 + 6 = 2193 > 1000$

De plus puisque (u_n) est croissante alors pour tout entier naturel $n \geq 7$ on a $u_n \geq u_7 \geq 1000$. Et puisque $u_6 < 1000$, il suit que $n_0 = 7$ est le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq 1000$.

(c) Compléter l'algorithme, donnée en annexe, qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Variables
U est un réel.
n et p sont des entiers naturels.
Entrée
Saisir le nombre entier naturel p.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à n la valeur 0
Tant que $U < 10^p$

Affecter à U la valeur $3^n + n - 1$
Affecter à n la valeur $n + 1$

Fin tantque

Sortie
Afficher n