BAC GRIS

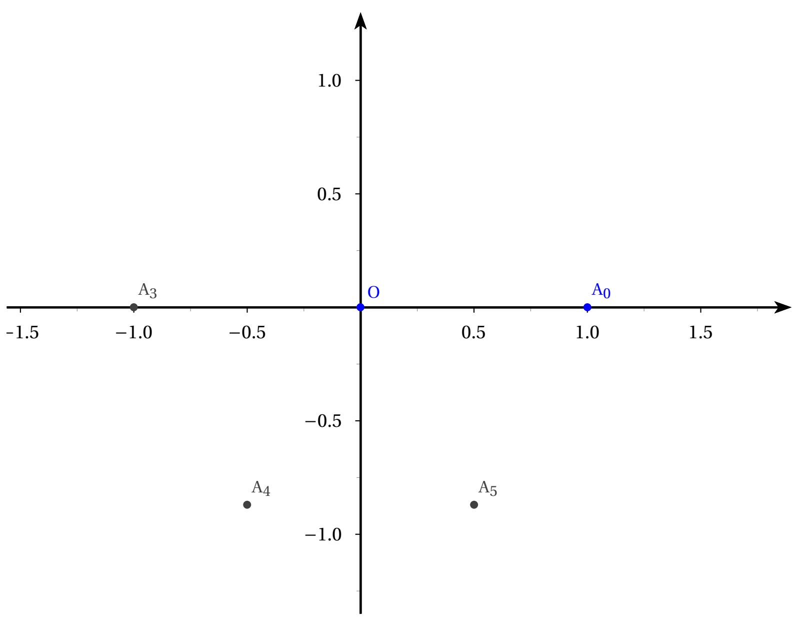
Exercice 1. **Commun à tous les candidats**

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 1 \\ z_{n+1} & = & \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

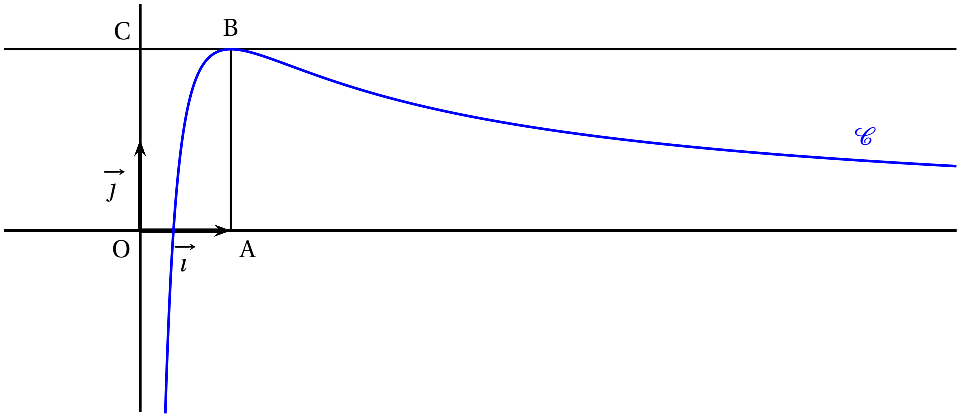
On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. (a) Calculer z_1, z_2 et z_3. On vérifiera que $z_3 = -1$.
   (b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**. On prendra soin d'effectuer les constructions à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée (on laissera les traits de construction apparent).
   (c) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est équilatéral.
   (d) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme exponentielle.
   (e) i. Déterminer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}$.
   ii. Que peut-on en déduire quant à la nature du triangle $\text{OA}_n\text{A}_{n+1}$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $r_{n+1} = r_n$. En déduire une formule donnant r_n en fonction de n.
   Interpréter géométriquement le résultat précédent.
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $z_n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs de n telles que O, A_0 et A_n sont alignés.
   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
   Ainsi $\text{L}_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \text{A}_i\text{A}_{i+1} = \text{A}_0\text{A}_1 + \text{A}_1\text{A}_2 + \ldots + \text{A}_{n-1}\text{A}_n$.
4. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $\text{A}_n\text{A}_{n+1} = 1$.
   (b) Donner une expression de L_n en fonction de n.



Exercice 2. **Commun à tous les candidats**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(1\,;2)$, $(0\,;2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   (b) Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   (c) En déduire les réels a et b.

2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$

   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. **On admet** qu'il existe un unique réel $5 < \beta < 6$ de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Les élèves qui s'autorisent l'usage de la calculatrice vérifieront que $5 < \beta < 6$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

(a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					
$f(m) \simeq$	1,23	-3.09	0.10	0.79	

(b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

(c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

   (a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   (b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, déterminer une primitive de $f(x)$.

   (c) Terminer la démonstration.

Exercice 3. **Réservé aux élèves qui n'ont pas choisit l'enseignement de spécialité.**

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
   Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

   (b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

   (c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

   (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
   $2^n \geqslant n^2$.

   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
   $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

   (d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

Exercice 4. **Commun à tous les candidats - Loi de Hardy-Weinberg**

Certains gènes peuvent avoir deux états : A (allèle dominant) ou a (allèle récessif).

Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants :

$$\text{AA} \quad \text{ou} \quad \text{A}a \quad \text{ou} \quad aa$$

Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents. Par exemple si un parent a le génotype AA et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa.

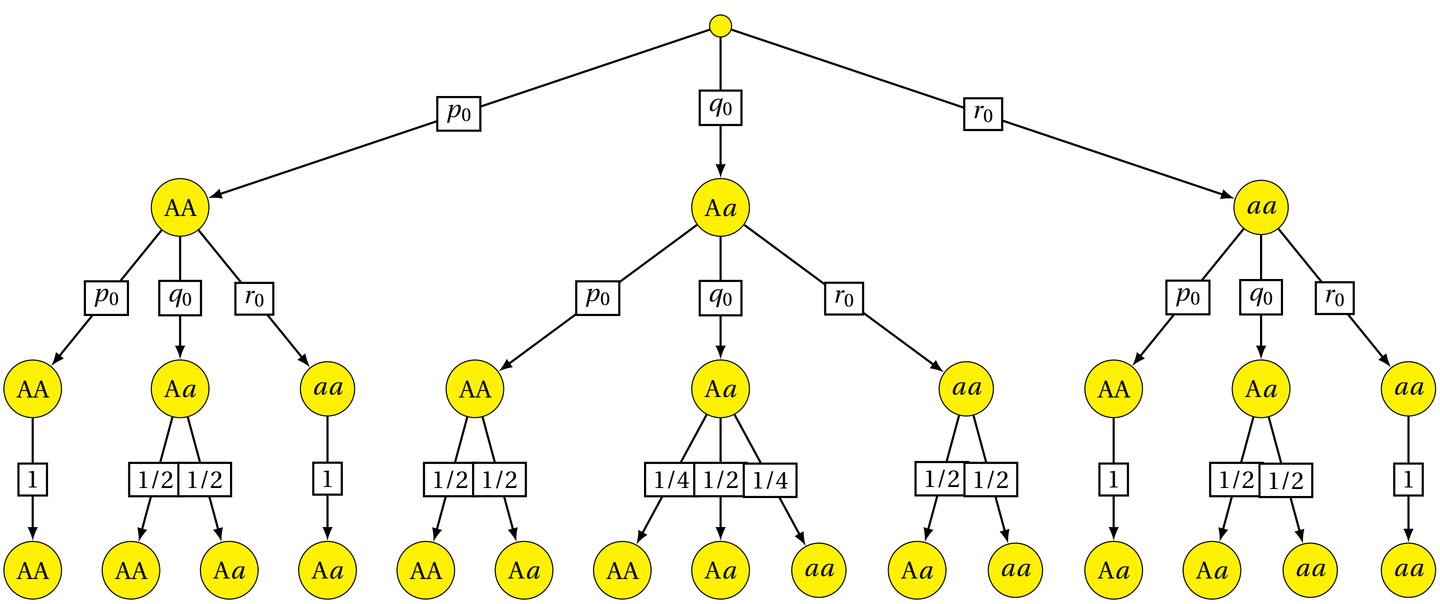
On pourra utiliser l'arbre fournit en annexe pour répondre aux questions qui suivent.

On considère une population dont les proportions des génotypes sont données par le tableau suivant :

Génotype	AA	Aa	aa	Total
Proportion	$p_0 = 0.4$	$q_0 = 0.3$	$r_0 = 0.3$	1

On se place dans l'hypothèse selon laquelle les couples se forment au hasard relativement à ces deux allèles (appariement aléatoire).

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   (a) E : « un enfant a deux parents de type AA » ;
   (b) F : « un enfant a un parent de type AA et un parent de type Aa »
   (c) G : « un enfant a deux parents de type aa »
2. Quelle est la probabilité pour que l'enfant soit de type AA sachant que :
   On pourra effectuer un arbre de probabilité dans chacun des cas suivants
   (a) les deux parents sont de type AA ?
   (b) un des parents est de type Aa et l'autre de type AA ?
   (c) les deux parents sont de type Aa ?
3. On pourra utiliser l'arbre de probabilité fournit avec le sujet.
   (a) Démontrer que $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$. Proposer une relation similaire pour r_1.
   (b) Calculer la probabilité p_1 pour que l'enfant soit de type AA.
   (c) Calculer de même la probabilité r_1 pour que l'enfant soit de type aa.
   (d) En déduire la probabilité q_1 pour que l'enfant soit de type Aa.
4. Calculer de même les probabilités p_2, q_2 et r_2 pour qu'un enfant de seconde génération soit de type AA, Aa et aa. Que remarque-t-on ?



Exercice 5. **Réservé aux élèves ayant suivit l'enseignement de spécialité**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante*

PARTIE A.

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associé à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Exemple :

M correspond à $x = 12$

$7 \times 12 + 5 = 89$

Or, $89 \equiv 11[26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.
2. (a) Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x[26]$ alors $15k \equiv x[26]$.
   (b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
   (c) En déduire que $y \equiv 7x+5[26]$ équivaut à $x \equiv 15y+3[26]$.
3. A l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

PARTIE B.

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 7a_n + 5 \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 15b_n + 3$$

1. Soit X_n et b les vecteurs colonnes $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Déterminer la matrice diagonale A d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n on ait $X_{n+1} = AX_n + b$
2. Soit $S = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{3}{14} \end{pmatrix}$. Vérifier que $AS + b = S$.
3. Pour tout entier naturel n, on définit le vecteur Y_n tel que $Y_n = X_n - S$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$Y_{n+1} = AY_n$$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$Y_n = A^n Y_0$$
4. Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$$

PARTIE C. **Hors Barème**

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple, pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine avec la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement affine à la lettre T et « 6 » fois le chiffrement affine à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6

Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.

Exercice 6.

Une entreprise cherche à recruter une secrétaire. Alice, Bob et Carole ont envoyé leur candidature pour occuper ce poste. La directrice des ressources humaines, Danièle, est chargé du recrutement. Débordé comme chaque semaine, Danièle décide de mettre en place la stratégie suivante pour effectuer son choix :

— Elle tire au sort l'ordre dans lequel elle va recevoir ses candidats ; ainsi il y a une chance sur trois qu'elle décide de recevoir Alice en premier, en deuxième ou en troisième.

— A l'issue de chaque entretien, elle choisit si elle engage le candidat ou si elle le refuse pour le poste.

— Dès qu'elle choisit d'engager un candidat elle ne reçoit pas les suivants.

— Dès qu'elle refuse un candidat, elle ne revient plus sur son choix et celui-ci peut aller chercher un travail ailleurs.

— Si elle fait passer le troisième entretien, alors elle a refusé les deux premiers candidats, auquel cas elle se retrouve obliger d'engager cet ultime candidat.

— Elle a la capacité de classer les candidats dès qu'elle les a rencontré.

Pour mieux comprendre voici trois exemples de ce qui peut arriver :

Exemple 1 : Danièle a choisit de recevoir Alice, Bob et Carole dans cet ordre (après tirage au sort). Suite à son entretien avec Alice, elle a choisit de refuser sa candidature et a donc reçu Bob. Elle s'est alors rendu compte qu'Alice était plus adapté pour le poste mais c'est Bob qu'elle a engagé. Elle n'a donc jamais rencontré Carole.

Exemple 2 : Danièle a choisit de recevoir Carole, Bob et Alice dans cet ordre (après tirage au sort). Suite à son entretien avec Carole, elle a choisit de refuser sa candidature et a donc reçu Bob. Moins convaincant que Carole qu'elle venait de refuser, elle a choisit de refuser Bob aussi. Elle a alors reçu Alice qu'elle n'a eu d'autre choix que d'engager. Quoiqu'elle ait engagé Alice, suite à ses trois entretiens elle juge que Carole était plus convaincante qu'Alice, elle même plus convaincante que Bob.

Exemple 3 : Danièle a choisit de recevoir Bob, Carole et Alice dans cet ordre (après tirage au sort). Elle a engagé Bob suite à son entretien et n'a donc jamais rencontré Carole et Alice.

But du problème : Le but du problème est de comparer deux stratégies et de déterminer laquelle permet à Danièle de s'assurer le meilleur recrutement.

PARTIE A. **Première stratégie**

Danièle adopte la stratégie suivante : à l'issue de chaque entretien, elle lance une pièce de monnaie, recrute le candidat si celle ci tombe sur pile.

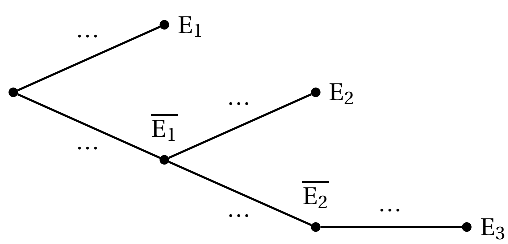
On note R l'événement : « Alice est recruté » ;

On note E_1 l'événement « A l'issue du premier entretien, un candidat est engagé »

On note E_2 l'événement « A l'issue du deuxième entretien, un candidat est engagé »

On note E_3 l'événement « A l'issue du troisième entretien, un candidat est engagé »

1. Recopier et compléter l'arbre suivant :



2. Déterminer les probabilités suivantes :
   (a) $p(E_1)$;
   (b) $p(\overline{E_1} \cap E_2)$;
   (c) $p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3)$.
3. qu'elle est la probabilité que Danièle ait effectué le meilleur choix ?

PARTIE B. **Deuxième stratégie**

Dans cette partie, on suppose que Danièle refuse systématiquement le premier candidat, accepte le second si celui-ci est meilleur que le premier et accepte le troisième si le second candidat est moins bon que le premier.

Qu'elle est la probabilité que Danièle ait recruté le meilleur candidat ?

PARTIE C. **Prolongement**

Danièle reçoit au dernier moment la candidature de Félipé, proposer la meilleure stratégie possible pour que le probabilité que Danièle le meilleur candidat soit la plus importante possible.