∽ DEVOIR SURVEILLÉ 3 ∽

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. En particulier dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. **(10 points)**

PARTIE A. **Etude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que nous noterons α puis déterminer α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de $g(x)$.

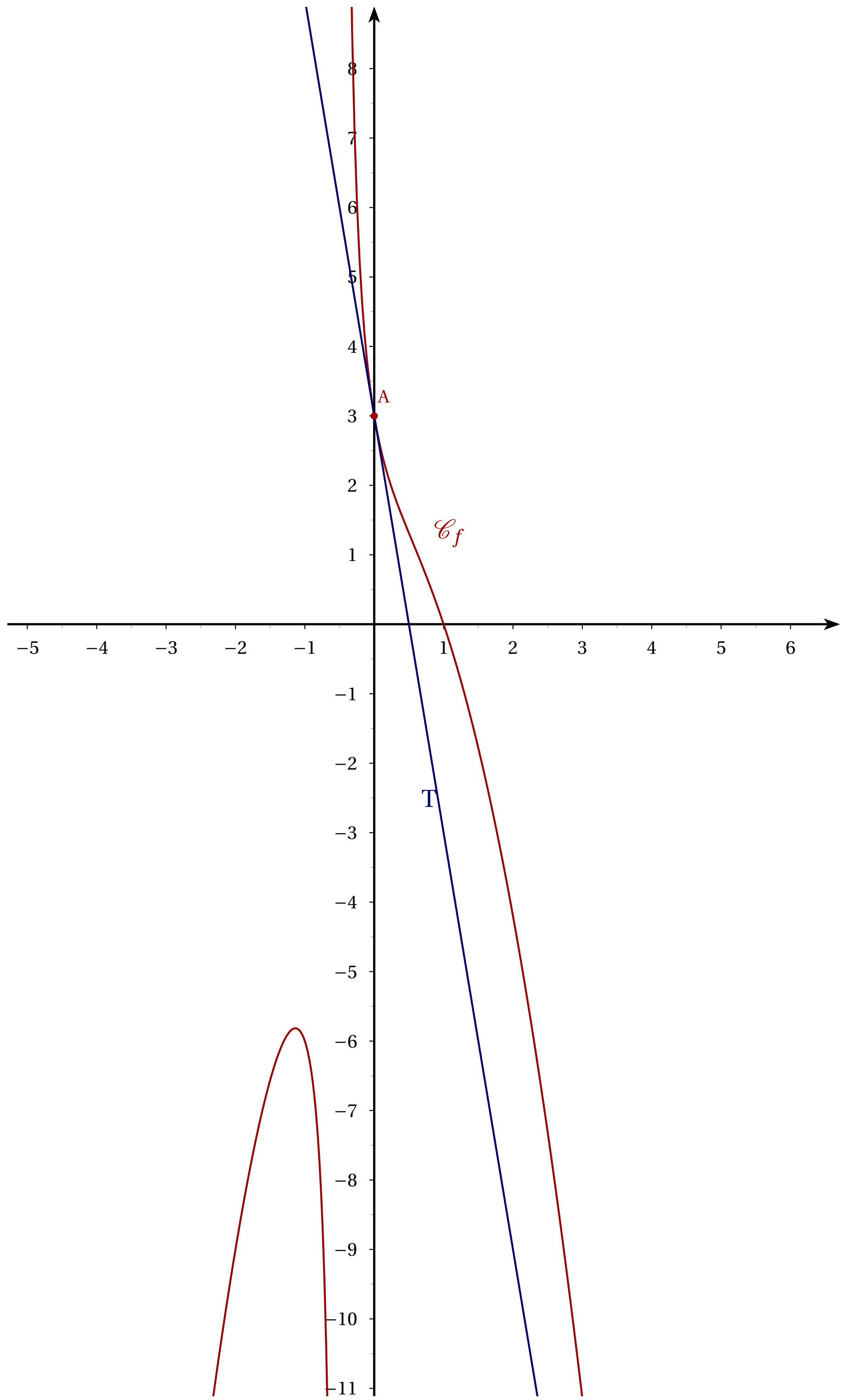
PARTIE B.

On considère la fonction f définie pour $x \neq -\dfrac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{3 - 3x^3}{2x + 1}$$

Dans un repère orthonormal, on note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$ on a :
   $$f'(x) = \frac{-3g(x)}{(2x+1)^2}$$
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) On note A(0; 3). Déterminer l'équation T de la tangente de $\mathscr{C}_f$ en A.
   (b) Démontrer que pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$ on a :
   $$f(x) - (-6x + 3) = \frac{3x^2(4 - x)}{2x + 1}$$
   (c) En déduire que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{1}{2}; 4\right[$.


A
$\mathscr{C}_f$
T
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11