↜ DEVOIR MAISON 6 ↝
NOMBRES COMPLEXES

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

<u>**Exercice**</u> **1.** ♠♠♠

PARTIE A. **Racine d'un polynôme de degré** 3

On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

1. Vérifier que -1 est une racine de P.
2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que :
$$P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$
3. En déduire l'ensemble des racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$.

PARTIE B.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$ et $z_C = -i$.

On considère la transformation t qui a tout point M, différent de O, d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' où

$$z' = \frac{\sqrt{3} - 1 + i}{z} + 2$$

1. (a) Calculer le module et un argument de z_A, z_B et z_C.
   (b) Calculer AB, AC et BC.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
2. Calculer les affixes z'_A, z'_B et z'_C des points A′, B′ et C′ image de A, B et C par la transformation t.
3. Représenter les triangles ABC et A′B′C′ dans le plan complexe puis déterminer la nature du triangle A′B′C′.

PARTIE C. **etude des invariants de la transformation t.**

On cherche l'ensemble des points M du plan tels que leur image M′ par la transformation t soit égales à M autrement dit le but de cette partie est de résoudre l'équation :

$$(E) : z = \frac{\sqrt{3} - 1 + i}{z} + 2$$

1. Démontrer que z est solution de l'équation (E) si et seulement si z est solution de $(z-1)^2 = \sqrt{3} + i$
   On considère le nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} + i$.
2. Déterminer le module de z_1 et un argument de z_1.
3. On cherche un nombre complexe Z qui vérifie (F) : $Z^2 = z_1$.
   (a) Déterminer le module de Z.
   (b) Démontrer que l'argument de Z que l'on notera θ vérifie :
   $$\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad \text{avec} \qquad k \in \mathbb{Z}$$
   (c) Représenter géométriquement dans le plan complexe chaque point dont l'affixe est solution de l'équation (F) et donner une forme trigonométrique associée à chacune de ses affixes.
4. On considère les deux nombres complexes suivants :
   $$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{et} \qquad z_3 = \frac{z_1}{2}$$
   (a) Déterminer un module et un argument de z_2, z_3 et $\frac{z_2}{z_3}$.
   (b) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_2}{z_3}$, on précisera sa partie réelle et sa partie imaginaire.
   (c) En déduire que :
   $$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
5. En déduire les formes algébriques des solutions de l'équation (F) (c'est-à-dire déterminer la forme algébrique des racines carrées complexes de z_1) puis en déduire enfin l'ensemble des points invariants par la transformation t.