∾ Devoir Maison 5 ∾
Probabilité

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. ♠♠

Alice se trouve en possession de 5 clefs identiques qui lui permettent d'ouvrir son coffre secret. Malheureusement Alice sait que parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Elle veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au $x-$ème essai.

On appelle D_i l'événement : « la clef numéro i n'ouvre pas la porte. »

1. Calculer la probabilité de l'événement D_1.
2. (a) Déterminer $P_{D_1}(D_2)$.
   (b) En déduire la probabilité de l'événement $D_1 \cap D_2$.

   On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre de probabilité.
3. Quelle est la probabilité de l'événement A : « les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leq i \leq j \leq 5$, on note $B_{(i;j)}$ l'événement : « les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j ».
   (a) Calculer $P(B_{(2;4)})$.
   (b) Calculer $P(B_{(4;5)})$.

Exercice 2. ♠♠♠

Une des épreuves du jeu télévisé Fort Boyard consiste à ouvrir un coffre contenant p (avec $p > 6$) mygales sur lesquelles est collé un morceau de papier. Sur deux d'entre elles, le morceau de papier contient un code (le même sur ces deux mygales) utile au candidat pour la poursuite du jeu. Pour les autres, le papier est vierge. Le candidat doit obtenir ce code en temps limité.
On précise :

— le candidat choisit au hasard une mygale dans le coffre ;

— si le papier est vierge, le candidat le pose en dehors du coffre ;

— le temps accordé permet au candidat, s'il surmonte sa peur, de faire six tentatives pour obtenir le code.

On note C_i l'événement : « un code est inscrit sur le papier collé à la i-ième mygale choisit par le candidat ».

1. Réaliser un arbre pondéré de probabilité modélisant cette expérience.
2. Calculer la probabilité en fonction de p que le candidat ne trouve pas le code.
3. Combien faut-il au maximum de mygales pour que la probabilité que le candidat trouve le code soit supérieure à $0,60$?

Exercice 3.

R.O.C

Soit P une loi de probabilité sur un univers Ω.

On considère deux événements indépendants A et B. Démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.